



مجموعه گام به گام پایه یازدهم

دیجی کنکور، رسانه دانش آموزان موفق

ورود به مجموعه گام به گام ها

برای ورود به مجموعه گام به گام کلیک کنید

نیاز به برنامه ریزی داری؟

آیا می دونستی؟

دیجی کنکور ناشر محبوب ترین و دقیق ترین برنامه ریزی تحصیلی
ویژه پایه دهم است

۰۲۱-۲۸۴۲۲۴۱۰

فصل ۱ - آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها

درس ۱

استدلال ریاضی

درس ۲

قُلْ هَاتُوا بُرْهَانَكُمْ إِن كُنْتُمْ صَادِقِينَ

(آیه ۱۱۱ بقره)

«بگو اگر راست می‌گویید دلیل خود را بیاورید»



«تَحْنُ أَيْمَاءُ الدَّلِيلِ، تَمِيلُ حَيْثُ يَمِيلُ» امام صادق (ع)

ما فرزندان دلیل و برهانیم و در قضاوت به سویی که دلایل هدایت‌مان کنند می‌رویم.

درس ۱

گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها

منطق در لغت به معنای «آنچه به گفته درآمده» و عموماً آن را به معنای بررسی استدلال‌ها تعبیر می‌کنند. کاربرد منطق در تشخیص اعتبار استدلال‌هاست. امروزه منطق صرفاً به عنوان شاخه‌ای از فلسفه شمرده نشده و در ریاضیات و علوم مربوط به رایانه نیز به آن پرداخته می‌شود.

تعبیر دیگری از منطق، روش درست فکر کردن است. با تکیه بر این تعبیر می‌توان ادعا کرد که منطق دانان و افرادی که با منطق مانوس‌ترند، بسیار کمتر از دیگران در استدلال‌ها اشتباه می‌کنند.

از میان انواع منطق و کاربردهای آن در این فصل قصد داریم شما را با منطق ریاضی^۱ که شاخه‌ای از ریاضیات است و به بیان ریاضی‌گونه منطق می‌پردازد، آشنا کنیم. اگر ریاضیات را به عنوان یک زبان برای انتقال مفاهیم و اطلاعات در نظر بگیریم، منطق ریاضی، دستور این زبان است.

در بین جملاتی که ما از آنها استفاده می‌کنیم، جملات خبری از اهمیت و جایگاه ویژه‌ای برخوردارند و به‌ویژه صدق و کذب با درستی و نادرستی این خبرها برای ما و مخاطب ما اهمیت دارد. به عنوان مثال وقتی شما به دوست خود می‌گویید: «من امروز ساعت ۸ صبح در محل فرار حضور داشتم». خبری را برای او بیان می‌کنید که صدق یا کذب این خبر برای شما و دوستان مهم است. در منطق ریاضی به هر جمله خبری که بتوانیم (در حال حاضر یا در آینده) دقیقاً یکی از دو ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) را به آن نسبت بدهیم، یک گزاره گفته می‌شود.

جمله‌های غیر خبری مانند «چه هوای خوبی!» یا «شما اهل کجائید؟» و همچنین جمله‌های خبری که نتوانیم ارزش آنها را تعیین کنیم، گزاره نیستند؛ مثلاً «درس فلسفه از درس عربی آسان‌تر است».

فعالیت

۱. کدام یک از جملات زیر گزاره است؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید.
 - الف) شما چند سال دارید؟ ← گزاره نیست.
 - ب) عدد ۲ عددی اول است. ← گزاره است (درست)
 - پ) عدد $\sqrt{2}$ عددی گویا است. ← گزاره است (نادرست)
 - ت) افلاطون شاگرد ارسطو است. ← گزاره است (نادرست)
 - ث) $2+2 \times 4 = 20$ ← گزاره است (نادرست)
 - ج) عدد (-1) عددی همواره مثبت است. $(n \in N)$ ← گزاره است (نادرست)
 - چ) سیب قرمز از سیب زرد خوش‌مزه‌تر است. ← گزاره نیست.
 - ح) لطفاً تخته را پاک کن. ← گزاره نیست.

گذاره های درست: مجموع زاویه ها داخل مثلث ۱۸۰ درجه است / ۹ عدد اول نیست.
 گذاره های نادرست: مربع سه ضلعی است / $\frac{1}{2}$ عدد گنگ است.
 دو جمله غیر گزاره ای: معادله ای زیر را حل کن / به کدام رشته ای ورزشی علاقه دارید؟

۲. دو گزاره درست و دو گزاره نادرست بیان کنید و همچنین دو جمله بنویسید که گزاره نباشند.

گاهی اوقات گزاره ای که بیان می کنیم، ترکیبی از دو یا چند گزاره است. در این صورت برای تشخیص درستی یا نادرستی این گزاره ها که به گزاره های ترکیبی معروف اند، باید بیشتر تأمل کنیم و آنها را دقیق تر بررسی کنیم. به عنوان مثال جمله «۳ عددی فرد است و $\sqrt{2}$ عددی گنگ است»، از ترکیب دو گزاره ساده «۳ عددی فرد است» و « $\sqrt{2}$ عددی گنگ است» توسط حرف ربط «و» ساخته شده است. واضح است که ارزش این گزاره ترکیبی به ارزش دو گزاره ساده مذکور بستگی دارد. اگر هر دو گزاره نادرست باشند، ارزش گزاره ترکیبی چیست؟ اگر هر دو درست باشند، چه ارزشی برای آن قائل هستید؟ اگر یکی از گزاره ها درست و دیگری نادرست باشد، چه پاسخی می دهید؟ در حالت کلی برای یک گزاره ترکیبی که از ترکیب دو گزاره به دست آمده، و نسبت به ارزش های این دو گزاره، چند حالت می توان در نظر گرفت؟ آیا حروف ربط دیگری برای ترکیب دو گزاره وجود دارد؟ برای پاسخ به سؤال های اخیر نیاز داریم تا از نمادها و قراردادهای استفاده کنیم. به مجموعه این قراردادهای و نمادگذاری ها جبر گزاره ها یا حساب گزاره ها گفته می شود.

در منطق ریاضی و در جبر گزاره ها هر گزاره را با یکی از حروف انگلیسی مانند p یا q یا r ... نمایش می دهیم. در سه جدول زیر وضعیت ارزشی یک، دو و سه گزاره مشخص شده است. شما جدولی را برای نمایش وضعیت ارزشی چهار گزاره تشکیل دهید.

p
د
ن

$$2^1 = 2$$

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

$$2^2 = 4 = \text{تعداد حالت های ارزشی دو گزاره}$$

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

$$2^3 = 8 = \text{تعداد حالت های ارزشی سه گزاره}$$

نقیض یک گزاره: نقیض گزاره p را با نماد $(\sim p)$ نمایش می دهیم و آن را به صورت «نقیض p » یا «چنین نیست که p » می خوانیم. از آنجا که هر گزاره یک جمله خبری است و حتماً دارای فعل، برای بیان نقیض یک گزاره کافی است فعل جمله را نفی کنیم و واضح است که با این کار ارزش گزاره p اگر درست باشد، ارزش گزاره $(\sim p)$ نادرست و اگر p گزاره ای نادرست باشد، ارزش گزاره $(\sim p)$ درست خواهد بود.

به عنوان مثال، نقیض گزاره « n مثبت است»، به صورت « n مثبت نیست» بیان می شود. به جدول زیر توجه کنید:

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

کار در کلاس

در هر یک از حالت‌های زیر نفیض گزاره را بیان کنید؛ سپس، ارزش هر یک را مشخص کنید.

الف) عدد ۵ زوج است. (نادرست) \leftarrow نفیض \leftarrow عدد ۵ فرد است. (درست)

ب) تساوی « $4=2 \times 2$ » برقرار است. (درست) \leftarrow تساوی « $4=2 \times 2$ » برقرار نیست. (نادرست)

پ) عدد ۱۲ از ۱۵ کوچک‌تر است. (درست) \leftarrow عدد ۱۲ از ۱۵ کوچکتر نیست. (نادرست)

ت) ارسطو شاگرد افلاطون است. (درست) \leftarrow ارسطو شاگرد افلاطون نیست. (نادرست)

ث) ایران در منطقه غرب آسیا قرار دارد. (درست) \leftarrow ایران در منطقه غرب آسیا قرار ندارد. (نادرست)

ج) $(3 \times 7) > (5 \times 4)$ (نادرست) \leftarrow $(3 \times 7) > (5 \times 4)$ (درست)

در مثال قبل اگر نفیض گزاره « m مثبت است»، را به صورت « m منفی است» تعبیر کنیم، این دو گزاره نفیض هم نیستند؛ زیرا

وقتی « m مثبت نباشد، یا منفی است یا صفر است، در صورتی که « m منفی است» شامل صفر نمی‌شود.

ترکیب گزاره‌ها

در منطق ریاضی و در حساب گزاره‌ها، به صورت‌های متفاوتی می‌توان گزاره‌های ساده را با هم ترکیب، گزاره‌های مرکب تولید کرد. در این کتاب ترکیب گزاره‌ها توسط ۴ رابط «و»، «یا»، «شرطی» و «دو شرطی» انجام می‌شود. هر گزاره مرکب که از ترکیب دو یا بیشتر از دو گزاره ساده تولید می‌شود، خودش یک گزاره است و باید بتوانیم ارزش آن را تعیین کنیم. به گزاره‌های ترکیبی زیر توجه کنید:

الف) «۵ عددی فرد است و ۴ عددی اول است».

ب) «۱۲۱ مضرب ۱۲ است یا $\sqrt{3}$ مثبت است».

پ) «اگر من مسلمان باشم، آنگاه نبوت حضرت رسول اکرم ﷺ را قبول دارم».

ت) «اگر «عددی زوج باشد، آنگاه «زوج است و اگر «زوج باشد، آنگاه «زوج است»».

هر یک از گزاره‌های ترکیبی فوق از ترکیب دو گزاره به دست آمده‌اند و اگر از شما بخواهیم ارزش هر یک از آنها را تعیین کنید، شاید کمی مشکل به نظر برسد، ولی آنچه که مسلم است این است که ارزش گزاره‌های ترکیبی فوق به ارزش (درستی یا نادرستی) گزاره‌های ساده تشکیل دهنده آنها و نوع رابط به کار رفته بین آنها بستگی دارد.

۱. ترکیب عطفی دو گزاره: گزاره «عدد ۳ فرد است و ۷ عددی اول است» را در نظر بگیرید. چه استنباطی نسبت به درستی یا نادرستی این گزاره دارید؟ نسبت به صدق و کذب گزاره «افلاطون شاگرد ارسطو است و عدد ۴ زوج است»، چه استنباطی دارید؟ کاملاً واضح است که صدق یک گزاره مرکب که از ترکیب دو گزاره ساده با لفظ «و» تشکیل شده است، درستی هر دو گزاره را طلب می‌کند. به نظر شما گزاره دومی چه ارزشی دارد؟ توجه دارید که افلاطون شاگرد ارسطو نبوده است!

هرگاه بخواهیم دو گزاره مانند « p و « q را با لفظ «و» ترکیب کنیم، از نماد « \wedge » بین دو گزاره استفاده می‌کنیم و آن را ترکیب عطفی دو گزاره می‌نامیم و می‌نویسیم، « $p \wedge q$ »؛ و آن را به صورت « p و « q » می‌خوانیم. ارزش ترکیب عطفی دو گزاره با توجه به جدول زیر تعیین می‌شود:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، ترکیب عطفی دو گزاره فقط وقتی دارای ارزش درست است که هر دو گزاره ارزش درست داشته باشند و اگر حداقل یکی از دو گزاره نادرست باشند، « $p \wedge q$ » نادرست است.

فعالیت

در جدول زیر روبه‌روی گزاره‌های داده شده ارزش آنها را با علامت \checkmark مشخص کرده و نیز با توجه به ارزش داده شده با یک گزاره ساده، گزاره مرکب را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	هفته هفت روز دارد و ماه شهریور ۳۱ روز دارد	\checkmark	
۲	قرآن دارای ۳۰ جزء است و همه سوره‌های آن با بسم‌الله شروع می‌شود.		\checkmark
۳	۱۲... خرید..... و ۸ زوج است.		\checkmark
۴	کتاب قرآن ۱۱۴ سوره دارد و ۱۱۶... بسم‌الله دارد.	\checkmark	
۵	۵۷ عددی اول است و ۲ عددی اول نیست.		\checkmark
۶	۲ > ۵ و ۲ > ۵		\checkmark

۲. ترکیب فصلی دو گزاره: اگر شخصی به شما بگوید: «آن حیوان، برنده است یا مهره‌دار است»؛ صدق گفته او را در چه صورتی تأیید می‌کنید؟ اگر پس از بررسی معلوم شود که حیوان مورد نظر نه برنده بوده است و نه از تیره مهره‌داران بوده است، آیا گزاره مذکور دارای ارزش درست بوده است؟ در واقع صدق یک گزاره مرکب که از ترکیب دو گزاره ساده با لفظ «یا» تشکیل شده است، در صورتی تأیید می‌شود که حداقل یکی از دو گزاره ساده، ارزش درست داشته باشند.

هرگاه بخواهیم دو گزاره مانند « p » و « q » را با لفظ «یا» با هم ترکیب کنیم، از نماد « \vee » استفاده می‌کنیم و آن را ترکیب فصلی دو گزاره نامیده و می‌نویسیم « $p \vee q$ » و آن را به صورت « p یا q » می‌خوانیم. ارزش ترکیب فصلی دو گزاره با توجه به جدول زیر تعیین می‌شود:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، ترکیب فصلی دو گزاره تنها وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزاره نادرست باشد و اگر حداقل یکی از دو گزاره، ارزش درست داشته باشند، در این صورت ارزش ترکیب فصلی آنها درست است.

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	عدد ۴ عددی فرد یا عددی اول است.		✓
۲	حضرت مهدی علیه السلام امام دوازدهم شیعیان است یا علیه السلام امام یازدهم شیعیان است.	✓	
۳	۹۱ عددی مرکب است یا $۱۹ = ۱۰ + ۹$ ، زوج است.	✓	
۴	افلاطون نویسنده کتاب ارشون است.		✓
۵	... نشد آید ... یا $۱۸ = ۱۰ + ۸$ ، زوج است.	✓	

۳. ترکیب شرطی دو گزاره

هرگاه بخواهیم از گزاره p گزاره q را نتیجه بگیریم، از نماد « \Rightarrow » استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم: « $p \Rightarrow q$ » و آن را به صورت‌های زیر می‌خوانیم:

(اگر p آنگاه q)، (p نتیجه می‌دهد q را)، (q از p نتیجه می‌شود)

در گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ »، p را مقدم و q را تالی می‌نامیم.

ارزش گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ » با توجه به جدول زیر تعیین می‌گردد:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ » فقط زمانی دارای ارزش نادرست است که مقدم؛ یعنی p درست بوده ولی تالی یعنی q دارای ارزش نادرست باشد (از یک گزاره درست نتیجه‌ای نادرست حاصل شود) و در بقیه موارد ارزش « $p \Rightarrow q$ » درست است.

به‌ویژه وقتی که ارزش مقدم گزاره شرطی یعنی « p »، نادرست باشد، همواره « $p \Rightarrow q$ » دارای ارزش درست بوده و درست یا نادرست بودن q تأثیری در ارزش گزاره « $p \Rightarrow q$ » ندارد؛ بنابراین در هر یک از دو حالت مذکور، گزاره شرطی به انتهای مقدم دارای ارزش درست است.

◆ مثال:

۱. گزاره‌های «اگر $3^2=6$ آنگاه، ۵ اول است» و «اگر ۸ فرد است، آنگاه $2 > 4$ » هر دو به انتفای مقدم درست هستند.
۲. گزاره «اگر ۱۷ اول است آنگاه ۱۸ اول است» نادرست است.
۳. گزاره «اگر $2^2=4$ آنگاه $2^3 > 3^2$ » درست است.

تذکر: در تعیین ارزش گزاره‌های شرطی، در صورتی که ارزش تالی درست باشد، نمی‌توانیم ایرادی از کل گزاره شرطی بگیریم؛ زیرا نتیجه شرط، درست است و اگر از مقدم ایراد بگیریم، گوینده به راحتی می‌تواند با کلمه «اگر» که روی مقدم بیان می‌شود، ایراد را رفع کند؛ و چنانچه ارزش تالی نادرست باشد و مقدم نیز دارای ارزش نادرست باشد، درست بودن گزاره $q \Rightarrow p$ فاقد ایراد است. (از بیان گزاره‌ای نادرست به نتیجه‌ای نادرست رسیدن، عجیب نیست!)

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید:

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر ۷ زوج است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است.	✓	
۲	اگر ۹ مربع کامل است، آنگاه $\sqrt{4}$ مربع کامل است.		✓
۳	اگر ۲۹ اول است، آنگاه ۲ زوج است.	✓	
۴	اگر $5 > 3$ آنگاه $6 > 7$		✓
۵	اگر $5 > 7$ آنگاه $3 > 1$	✓	
۶	اگر ۷ فرد است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است.	✓	
۷	اگر $13 = 5$ ^{باید نتیجه بگیریم} آنگاه ۹۹ اول است.	✓	

کار در کلاس

اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، در این صورت مانند نمونه، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان، مشخص کنید:

- ۱) $(q \Rightarrow p) \wedge r$ (ارزش گزاره $(q \Rightarrow p)$ به انتفای مقدم درست بوده و لذا ارزش گزاره $(q \Rightarrow p) \wedge r$ به ارزش گزاره r بستگی دارد.)
- ۲) $(p \vee q) \vee r$
- ۳) $(p \Rightarrow q) \wedge r$
- ۴) $(r \Rightarrow p) \vee q$
- ۵) $(r \Rightarrow p) \Rightarrow q$
- ۶) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
- ۷) $(p \wedge q) \Rightarrow r$

حل کاردر کلاس صفحه ۷ فصل ۱ (ریاضی و آمار ۲)

$$p \equiv T \text{ و } q \equiv F$$

۱) $(q \Rightarrow p) \wedge r$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (q \Rightarrow p) \equiv T \rightarrow (p \Rightarrow q) \wedge r \equiv ?$
۲) $(p \vee q) \vee r$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \vee q) \equiv T \rightarrow (p \vee q) \vee r \equiv T$
۳) $(p \Rightarrow q) \wedge r$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \Rightarrow q) \equiv F \rightarrow (p \Rightarrow q) \wedge r \equiv F$
۴) $(r \Rightarrow p) \vee q$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (r \Rightarrow p) \equiv T \rightarrow (r \Rightarrow p) \vee q \equiv T$
۵) $(r \Rightarrow p) \Rightarrow q$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (r \Rightarrow p) \equiv T \rightarrow (r \Rightarrow p) \Rightarrow q \equiv F$
۶) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \Rightarrow q) \equiv F \rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow r \equiv T$
۷) $(p \wedge q) \Rightarrow r$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \wedge q) \equiv F \rightarrow (p \wedge q) \Rightarrow r \equiv T$

۴. ترکیب دو شرطی: هرگاه بخواهیم از گزاره p ، گزاره q را نتیجه بگیریم و نیز از گزاره q ، گزاره p را نتیجه بگیریم، از نماد « \Leftrightarrow » استفاده کرده و می نویسیم « $p \Leftrightarrow q$ » و آن را به صورت های m نتیجه می دهد q را و q نتیجه می دهد p را، «اگر p آنگاه q » و «اگر q آنگاه p » اگر p آنگاه q و برعکس، m شرط لازم و کافی است برای « q » و « m اگر و تنها اگر q » می خوانیم. در واقع گزاره دو شرطی « $p \Leftrightarrow q$ » همان گزاره $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ است.

تذکر: هم ارزش بودن دو گزاره p و q را با نماد $p \equiv q$ نشان می دهیم؛ در این صورت:

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$$

بنابراین با توجه به ارزش گزاره های شرطی و عطفی ارزش گزاره های دو شرطی طبق جدول زیر به دست می آید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

همان طور که در ستون آخر مشاهده می کنید، اگر دو گزاره p و q هم ارزش باشند؛ یعنی $p \equiv q$ (هر دو درست یا هر دو نادرست) در این صورت ارزش گزاره دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ ، درست است.

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر ۲ فرد است، آنگاه ۸ عددی اول است و برعکس.	✓	
۲	اگر دو عدد فرد باشند آنگاه مجموع آنها زوج است و برعکس.		✓
۳	۷. عدد اول ... اگر و تنها اگر ۱۱۹ عددی مرکب است. <i>باشد</i>	✓	
۴	اگر دو زاویه ... آنگاه ... <i>برعکس</i>		✓
۵	یک چهار ضلعی مربع است، اگر و تنها اگر آن چهار ضلعی لوزی باشد.	✓	
۶	اگر واریانس داده ها برابر صفر باشد؛ آنگاه داده ها با یکدیگر برابرند و برعکس		✓

حل کاردر کلاس صفحہ ۹ فصل ۱ (ریاضی و آمار ۲)

$$p \equiv T \rightarrow \neg p \equiv F, \quad q \equiv F \rightarrow \neg q \equiv T$$

۱) $(p \Leftrightarrow q) \wedge r$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \Leftrightarrow q) \equiv F \rightarrow (p \Leftrightarrow q) \wedge r \equiv F$
۲) $(\neg p \Leftrightarrow q) \vee r$	$\begin{cases} \neg p \equiv F \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (\neg p \Leftrightarrow q) \equiv T \rightarrow (\neg p \Leftrightarrow q) \vee r \equiv T$
۳) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \Leftrightarrow q) \equiv F, (p \Rightarrow q) \equiv F$ $\rightarrow (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \equiv T$
۴) $(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (\neg p \vee q) \equiv F, (p \Rightarrow q) \equiv F$ $\rightarrow (\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \equiv T$
۵) $(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (\neg p \vee \neg q) \equiv T, (p \vee q) \equiv T$ $\rightarrow (\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \vee q) \equiv F$
۶) $(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (r \Leftrightarrow p) \equiv ?, (p \wedge q) \equiv F$ $\rightarrow (r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q) \equiv ?$
۷) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \wedge q) \equiv F, (p \vee q) \equiv T$ $\rightarrow (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q) \equiv F$

کار در کلاس

اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، مانند نمونه، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید:

۱) $(p \Leftrightarrow q) \wedge r$

۲) $(\neg p \Leftrightarrow q) \vee r$ چون $\neg p \equiv q$ پس $\neg p \Leftrightarrow q \equiv T$ و لذا ترکیب فعلی یک گزاره درست با هر گزاره‌ای، دارای ارزش درست است.

۳) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

۴) $(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

۵) $(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$

۶) $(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q)$

۷) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$

حل شد.

◆ مثال: با استفاده از جدول ارزش‌ها درستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید:

الف) $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$

ب) $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$

ب) $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$

ت) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

ث) $(p \vee \neg p) \equiv T$ و $(p \wedge \neg p) \equiv F$

الف)

$p \Rightarrow q$

p	q	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

ب)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

→ T ابتدای کلمه True به معنی راست (درست) و F ابتدای کلمه False به معنی دروغ (نادرست) است.

تذکر: گزاره $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ را عکس نقیض گزاره $(p \Rightarrow q)$ می‌نامیم.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(p \vee q)$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	د	د

ب)

تذکر: این قانون یا هم‌ارزی: یعنی $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ و مشابه آن: یعنی $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ به قوانین دمورگان معروف‌اند.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$
د	ن	د	ن
ن	د	د	ن

ت)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

ت)

تذکر: گزاره‌هایی نظیر $(p \vee \sim p)$ را گزاره‌هایی همیشه درست و $(p \wedge \sim p)$ را همیشه نادرست می‌نامیم.

طبق جدول $(p \wedge q)$ معادل $p \vee (p \wedge q)$ و به طور مشابه $(p \wedge q)$ معادل $q \vee (p \wedge q)$ است.

تمرین

۱. جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	بزرگ‌ترین معجزه پیامبر اسلام ﷺ قرآن است و اسلام آخرین دین الهی است.	✓	
۲	اگر $۳ \times ۲ = ۶$ آنگاه مربع هر عدد فرد عددی زوج است.	✓	
۳	اگر تهران پایتخت ایران است؛ آنگاه اهواز در جنوب شرق است.	✓	
۴	$۲ \times ۲ = ۲^۲ = ۸^۱ = ۴^۲$	✓	
۵	اگر عدد ۳ اول و عدد ۷ زوج باشد، آنگاه ۱۸ مربع کامل است.	✓	
۶	اگر ۲ عددی زوج یا منفی باشد، آنگاه عدد ۵ اول است.	✓	
۷	اگر فارابی معلم ثانی است، آنگاه افلاطون معلم اول است.	✓	
۸	امام حسین ع در سال ۱۲۴۳ تبعید و در سال ۱۲۵۷ به ایران بازگشتند.	✓	
۹	حضرت علی ع اولین مردی است که پس از پیامبر، اسلام آوردند و او !	✓	
۱۰	اگر $۲ > ۳$ آنگاه $\frac{۱}{۳} < \frac{۱}{۲}$ و برعکس	✓	

امام اول است
شیعیان

حل تمرین صفحہ ۱۱ فصل ۱ (ریاضی و آمار ۲)

:۲

$$p \equiv T \rightarrow \neg p \equiv F, \quad q \equiv F \rightarrow \neg q \equiv T$$

الف) $(p \vee r) \Rightarrow p$	$\begin{cases} p \equiv T \\ r \equiv ? \end{cases} \rightarrow (p \vee r) \equiv T \rightarrow (p \vee r) \Rightarrow p \equiv T$
ب) $(q \wedge r) \Rightarrow r$	$\begin{cases} q \equiv F \\ r \equiv ? \end{cases} \rightarrow (q \wedge r) \equiv F \rightarrow (q \wedge r) \Rightarrow r \equiv T$
پ) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge r)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \wedge q) \equiv F, (\neg p \wedge r) \equiv F$ $\rightarrow (p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge r) \equiv T$
ت) $(\neg q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (\neg q \Rightarrow p) \equiv T, (p \Leftrightarrow q) \equiv F$ $\rightarrow (\neg q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q) \equiv F$
ث) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \Rightarrow q) \equiv F, (\neg q \Rightarrow \neg p) \equiv F$ $\rightarrow (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) \equiv T$
ج) $(q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (q \vee r) \equiv ?, (r \Rightarrow p) \equiv T$ $\rightarrow (q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \equiv T$
ح) $(\neg p \Rightarrow r) \Rightarrow \neg q$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (\neg p \Rightarrow r) \equiv T$ $\rightarrow (\neg p \Rightarrow r) \Rightarrow \neg q \equiv T$
خ) $(\neg q \Rightarrow \neg p) \wedge r$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) \equiv F$ $\rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) \wedge r \equiv F$
د) $(r \Rightarrow p) \wedge p$	$\begin{cases} p \equiv T \\ r \equiv ? \end{cases} \rightarrow (r \Rightarrow p) \equiv T \rightarrow (r \Rightarrow p) \wedge p \equiv T$

$$\text{الف) } \neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p \vee \neg q)$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

$$\text{ب) } p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q)$	$(p \wedge r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	ن	د
د	ن	د	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

$$\text{ج) } p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

p	q	$(p \vee q)$	$p \wedge (p \vee q)$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن

$$\text{ت) } (p \Rightarrow p) \equiv T$$

p	$p \Rightarrow p$
د	د
ن	د

$$\text{ث) } (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \equiv p$$

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$(p \vee q)$	$(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$
د	د	ن	د	د	د
د	ن	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	د	ن
ن	ن	د	د	ن	ن

$$\text{ج) } (p \wedge \neg q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$$

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \Rightarrow q)$	$(p \wedge \neg q) \vee (p \Rightarrow q)$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د	د

۲. اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید:

الف) $(p \vee r) \Rightarrow p$

ب) $(q \wedge r) \Rightarrow r$

پ) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge r)$

ت) $(\neg q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

ث) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

ج) $(q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$

ح) $(\neg p \Rightarrow r) \Rightarrow \neg q$

خ) $(\neg q \Rightarrow \neg p) \wedge r$

ط) $(r \Rightarrow p) \wedge p$

درست. خ

۳. درستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید:

الف) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$

ب) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

پ) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

ت) $(p \Rightarrow p) \equiv T$

ث) $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \equiv p$

ج) $(p \wedge \neg q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$

درست. ح

درس ۲

استدلال ریاضی

در درس گذشته با انواع گزاره‌ها و جدول ارزشی گزاره‌ها آشنا شدید. از طرفی در سال گذشته انواع استدلال‌های منطقی و قیاس‌ها را در کتاب منطق خود فراگرفتید. در این درس ابتدا به نحوه تبدیل گزاره‌های توصیفی به نمادهای ریاضی و سپس با استفاده از قواعد و قضایای منطقی به استدلال ریاضی می‌پردازیم. در اینجا منظور از استدلال ریاضی استفاده از ریاضی و نیز قواعد منطقی گزاره‌ها در حل مسائل و همچنین اثبات یا رد یک گزاره به کمک ریاضی است.

اولین گام برای استدلال ریاضی این است که یک عبارت توصیفی را به زبان ریاضی بازنویسی کنیم. در ادامه با مثال‌هایی از تبدیل عبارت‌های توصیفی به زبان و نمادهای ریاضی آشنا می‌شوید.

مثال ۱: سال گذشته با عبارت زیر آشنا شدید.

«ما و ما و نصف ما و نیمه‌ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، ما جملگی صد می‌شویم».

اکنون عبارت فوق را به صورت نماد ریاضی بازنویسی می‌کنیم. کافی است به جای «ما» در ابتدای عبارت از x استفاده کنیم.

در این صورت خواهیم داشت:

$$x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x \right) + 1 = 100 \rightarrow 2x + \frac{3}{4}x + 1 = 100 \rightarrow \frac{11}{4}x + 1 = 100$$

$$2x \quad \frac{1}{4}x$$

بنابراین عبارت توصیفی فوق به صورت « $\frac{11}{4}x + 1 = 100$ » بازنویسی شد که به وضوح یک معادله ریاضی است.

مثال ۲: به عبارت زیر که عیناً از کتاب خلاصه الحساب انتخاب شده است، توجه کنید:

عَدَدٌ ضَرَبَ فِي نِصْفِهِ وَزَيْدٌ عَلَى الْخَاصِلِ اثْنَا عَشَرَ حَصَلَ خَمْسَةُ أَمْثَالِ الْعَدَدِ.

«عددی را در نصف خودش ضرب کردیم، آنگاه بر حاصل ضرب عدد ۱۲ را افزودیم. حاصل ۵ برابر عدد منظور شد».

برای تبدیل عبارت کلامی بالا به صورت نماد ریاضی، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

عدد منظور را x در نظر بگیریم. در نتیجه عبارت بالا به صورت زیر در خواهد آمد:

$$x \times \left(\frac{1}{2}x \right) + 12 = 5x \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + 12 = 5x \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - 5x + 12 = 0$$

عبارت فوق یک معادله درجه دوم است.

مثال ۳: عبارت «ده درصد قیمت فروش کالا یعنی برابر سود آن است.» را به صورت نماد ریاضی بیان می‌کنیم. کافی است قیمت فروش این کالا را x و قیمت خرید آن را y در نظر بگیریم:

$$\frac{10}{100}x = x - y$$

کار در کلاس

عبارت زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

الف) عددی به علاوه پنج، مساوی دو برابر آن عدد است. $x + 5 = 2x$ ←

ب) حاصل ضرب دو عدد حقیقی، برابر مجموعشان است. $xy = x + y$ ←

ج) حاصل ضرب عددی در خودش به علاوه ۳ بزرگ‌تر از خودش است. $x^2 + 3 > x$ ←

خواندنی ۱

کورت گودل (Kurt Gödel) یک ریاضی‌دان برجسته اتریشی است که در زمینه منطق، به ویژه تبدیل عبارات به نماد ریاضی تلاش‌های بسیاری انجام داد. نتیجه تحقیقات او در منطق ریاضی سبب پیدایش تحولات شگرفی در علم منطق به ویژه منطق ریاضی شد. فضایی معروف او موسوم به «فضای نامعینیت گودل» که در سال ۱۹۳۱ منتشر شدند فهم بشر را از نارسایی‌های موجود در دستگاه‌های منطقی سازگار^۱ دگرگون کرد. فضای او به عنوان یکی از بزرگ‌ترین بحران‌های تاریخ ریاضیات شناخته می‌شوند. وی با تبدیل برخی گزاره‌ها به عبارات پیچیده ریاضی به کمک اعداد اول نشان داد که در هر دستگاه منطقی سازگار همواره گزاره‌هایی وجود دارند که یا درست هستند یا نادرست؛ ولی ما هرگز نمی‌توانیم درستی یا نادرستی آنها را ثابت کنیم و لذا همه دستگاه‌های منطقی سازگار، ناقص هستند. وی چنین گزاره‌هایی را «گزاره‌های اثبات ناپذیر» می‌نامد. کارهای او از جمله «کدگذاری گودلی» بعدها در زمینه‌های مختلفی به ویژه در علوم رایانه و رمزنگاری استفاده شد. امروزه از تکنیک‌های مشابهی برای تولید بارکد محصولات استفاده می‌شود. در این بارکدها ابتدا یک عبارت توصیفی به عبارت ریاضی (معمولاً یک عدد) و سپس به یک شکل هندسی تبدیل می‌شود. نمونه‌ای از این بارکدها را در زیر می‌بینید. با استفاده از نرم‌افزارهای بارکدخوان عبارت مناظر با این بارکدها را بیابید. در کتاب منطق با انواع قیاس‌ها آشنا شدید. قیاس‌ها ابزارهای مهمی در استدلال و به ویژه استدلال ریاضی هستند.



۱- دستگاه منطقی مجموعه‌ای از اصول و قواعد منطقی است که درست پذیرفته می‌شوند. یک دستگاه منطقی را وقتی سازگار گوئیم که با ترکیب اصول و قواعد آن توان هیچ یک از پارادوکس‌های شناخته شده را اثبات کرد.

یکی از انواع قیاس‌ها که در استدلال‌های ریاضیاتی کاربرد فراوان دارد، «قیاس استثنایی» است. در زیر با ذکر مثالی از این نوع قیاس آن را یادآوری می‌کنیم.

مقدمه ۱: اگر امشب شب چهاردهم ماه باشد، آنگاه ماه کامل است.

مقدمه ۲: امشب، شب چهاردهم ماه است.

نتیجه: ماه کامل است.

استدلال بالا را می‌توان به‌طور کلی به شکل زیر صورت بندی کرد.

اگر الف آنگاه ب

الف

∴ ب

و با استفاده از نمادگذاری‌های درس قبل داریم:

$p \rightarrow q$

p

∴ q

که در اینجا سه نقطه (∴) نماد نتیجه است.

گاهی از این قیاس به شکل نادرست استفاده می‌شود و منجر به نتیجه‌گیری نادرست می‌شود. به این گونه استدلال‌های مغالطه می‌گویند. در زیر به مثالی از این نوع برداشته شده است.

مثال ۱: آرش معتقد است که «هرکس از من متنفر است، پشت سر من حرف می‌زند. از طرفی سعید پشت سر من حرف زده است. پس سعید از من متنفر است».

برای بررسی درستی یا نادرستی استدلال آرش ابتدا مقدمات استدلال او را در زیر مرتب کرده‌ایم:

اگر کسی از من متنفر باشد، آنگاه پشت سر من حرف می‌زند.

q

p

سعید پشت سر من حرف زده است.

q

$p \rightarrow q$

q

∴ p

سعید از من متنفر است: p

در واقع استدلال آرش به صورت روبه‌رو است:

در حالی که در قیاس استثنایی مقدمه دوم باید p باشد و نه q . پس استدلال آرش نادرست است.

با استفاده از نمادهای ریاضی و قواعد منطقی می‌توان مسائل زیادی را حل کرد. استفاده از نمادهای ریاضی اغلب باعث شفاف‌تر شدن مسئله و سهولت در به‌کارگیری قواعد منطقی می‌شود. در زیر به نمونه‌ای از استدلال ریاضی در حل مسائل برداشته شده است.

کار در کلاس

۱. با استفاده از جدول ارزشی، درستی قاعده قیاس استثنایی $q \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge p)$ را نشان دهید.

۲. در هر یک از استدلالات زیر جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید تا قیاس کامل شود.

دو خط هیچ گاه یکدیگر را قطع نمی کنند: $q \Rightarrow$ دو خط موازی باشند: p
 $x: p > 0 \Rightarrow q: x' > 0$
 $p: 2 > 0$

خط موازی و یکدیگر را قطع نمی کنند.

خطوط L_1 و L_2 هیچ گاه یکدیگر را قطع نمی کنند.

مثال ۲: سه لیوان همانند شکل زیر داریم که یکی از آنها وارونه است. می خواهیم همه آنها در حالت درست (رو به بالا) قرار گیرند. ولی مجاز هستیم تا هر بار دقیقاً دو لیوان را تغییر وضعیت دهیم (اگر وارونه است، آن را درست کنیم و برعکس) سؤال این است که آیا این کار امکان پذیر است؟ اگر بلی با چند حرکت مجاز؟ امتحان کنید!

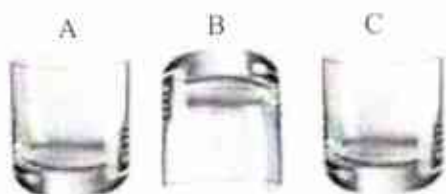
پاسخ: به کمک یک استدلال ساده ریاضی که در ادامه می آید، نشان می دهیم که این کار امکان پذیر نیست. برای این کار داریم:

تعداد لیوان های وارونه = s

وضعیت فعلی (یک لیوان وارونه است): $s=1$

وضعیت مطلوب (هیچ لیوانی وارونه نباشد): $s=0$

حرکت مجاز: در هر بار دقیقاً دو لیوان تغییر وضعیت دهد.



حالات ممکن در هر حرکت مجاز در حالت کلی

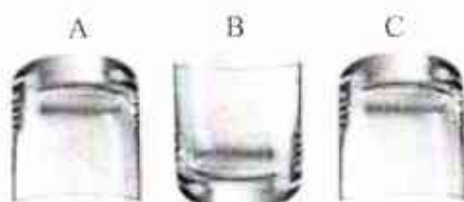
- $s-2 \rightarrow$ تعداد لیوان های وارونه دو تا کم می شود \rightarrow دو لیوان درست می شود
- $s+2 \rightarrow$ تعداد لیوان های وارونه دو تا اضافه می شود \rightarrow دو لیوان وارونه می شود
- $s+0 \rightarrow$ یک لیوان درست و یک لیوان وارونه می شود

بنابراین s همیشه به اندازه عددی زوج (یا -2 یا $+2$ یا -4 یا $+4$...) تغییر می یابد و هرگز از 1 به 0 کاهش نمی یابد.

کار در کلاس

۱. مثال سه لیوان را در حالت زیر بررسی کنید. آیا فقط یک راه حل دارد؟

حل شده.



۲. مثال سه لیوان را برای حالتی که بیش از ۳ لیوان داریم و تعداد فردی از لیوان ها را که وارونه هستند، بررسی کنید. آیا

استدلال گفته شده در آنجا قابل تعمیم به حالت اخیر است؟

حل کاردر کلاس اول صفحہ ۱۵ فصل ۱ (ریاضی و آمار ۲)

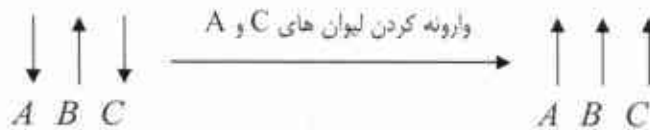
۱:

p	q	$(p \Rightarrow q)$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د

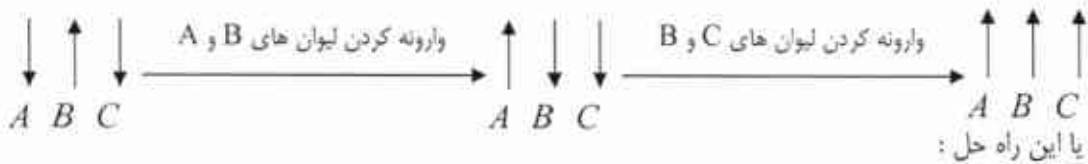
لذا قیاس استثنایی $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ همیشه درست است.

حل کاردر کلاس دوم صفحہ ۱۵ فصل ۱ (ریاضی و آمار ۲)

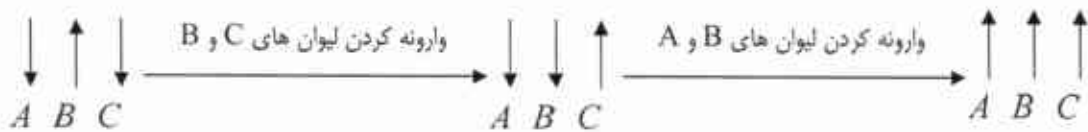
۱: یک راه حل:



مسئله راه حل های دیگری هم دارد. مثلاً:

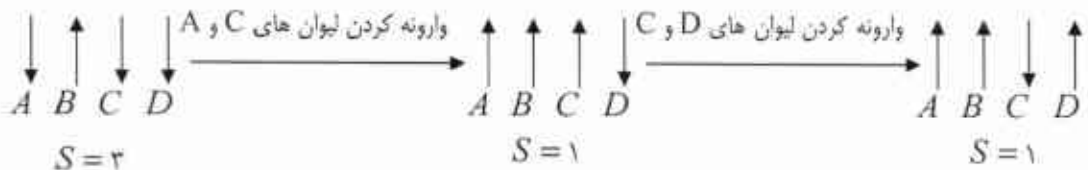


یا این راه حل:



۲: مسئله را برای چهار لیوان که سه لیوان از بین آنها وارونه هستند را بررسی می کنیم. (تعداد لیوان های

وارونه را برابر S قرار می دهیم.)



در هر حالت با وارونه کردن دو لیوان مقدار S برابر ۱ باقی می ماند. مطلوب آن است که $S = 0$ شود. با این

استدلال معلوم می شود که حالت $S = 0$ به دست نمی آید. لذا مسئله جواب ندارد.

تذکر: در درس قبل دیدیم که دو گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ و $\sim p \Rightarrow \sim q$ هم ارزند. به عبارت دیگر اگر بخواهیم ثابت کنیم گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ درست است و این کار دشوار باشد، به جای آن می توان ثابت کرد $\sim p \Rightarrow \sim q$ درست است. در این حالت می گوییم عکس نقیض گزاره اصلی را ثابت می کنیم.

مثال ۳: ثابت کنید «اگر n^2 زوج باشد آنگاه n زوج است» ($n \in \mathbb{Z}$).
اگر فرض کنیم

p : n^2 زوج است

q : n زوج است

و بخواهیم از درستی گزاره p به گزاره q برسیم، مسیر اثبات دشوار است. برای این کار از عکس نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ یعنی $\sim p \Rightarrow \sim q$ استفاده می کنیم. یعنی نشان می دهیم اگر n زوج نباشد (یعنی فرد باشد، چون حالت دیگری وجود ندارد)، آنگاه n^2 زوج نیست (یعنی n^2 فرد است).

دیویدارد، $(k \in \mathbb{Z})$

$$n \text{ فرد است} \Rightarrow n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n^2 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_m) + 1$$

$$\Rightarrow n^2 = 2m + 1$$

تساوی اخیر نشان می دهد که n^2 فرد است و لذا حکم به دست می آید.

گاهی در یک استدلال یا اثبات ریاضی دچار خطا می شویم. یافتن خطا در یک استدلال برای رفع ایراد آن بسیار مهم است. گاهی یک استدلال غلط برای سال ها درست پنداشته می شود تا اینکه دانشمندی به غلط بودن آن پی می برد. کشف محل اشکال در یک استدلال همواره ساده نیست و نیاز به مهارت و دقت دارد. به مثال های زیر دقت کنید.

مثال ۱: دانش آموزی ادعا می کند که معادله $x^2 - x = 0$ تنها یک ریشه دارد و آن $x = 1$ است. استدلال او در زیر آمده است.

۱) $x^2 - x = 0$

۲) $x(x - 1) = 0$ تجزیه معادله

۳) $\frac{x(x-1)}{x} = \frac{0}{x}$ تقسیم طرفین بر x و ساده سازی

۴) $x - 1 = 0$ حاصل ساده سازی و تبدیل به معادله ساده تر

۵) $x = 1$ جواب معادله

ایراد این استدلال در این است که در گام سوم اجازه تقسیم بر x وجود ندارد، چون x ممکن است صفر باشد و عبارت بی معنا می شود.

مثال ۲: دانش آموزی گزاره $a < b \Rightarrow ac < bc$ را که a, b, c و c اعداد حقیقی اند، به صورت زیر ثابت کرده است. ایراد

این استدلال را پیدا کنید.

۱) $a < b$

۲) $a + c < b + c$ طرفین را با c جمع می کنیم.

۳) $c(a + c) < c(b + c)$ طرفین نامساوی قبل را در c ضرب می کنیم.

۴) $ac + c^2 < bc + c^2$ c را در برانتزها ضرب می کنیم.

۵) $ac + c^2 < bc + c^2$ چون c^2 عددی همواره مثبت است، می توان آن را از طرفین کم کرد.

۶) $ac < bc$

ایراد این استدلال در گام سوم است. چون علامت c معلوم نیست (ممکن است مثبت یا منفی باشد)؛ پس نمی توان آن را در طرفین نامساوی ضرب کرد. به عنوان مثال اگر $a=1$ و $b=2$ و $c=-1$ باشد، آنگاه گزاره فوق معادل است با « $1 < 2 \Rightarrow -1 < -2$ » که آشکارا نادرست است.

کار در کلاس

سؤال زیر در یک امتحان ریاضی داده شده است.

«اگر $a = \frac{a-d}{c-d}$ آنگاه مطلوب است d . ($a \neq 1$)»

استدلال های زیر را برای به دست آوردن d از برگه های امتحانی دانش آموزان آورده ایم. کدام یک از استدلال ها درست و کدام نادرست است؟ دلیل نادرستی هر استدلال غلط را بیان کنید.

(الف)

۱) $a = \frac{a-d}{c-d}$ ✗

۲) $a = \frac{-d}{c-d}$

۳) $d = 0$

حذف a در مرحله اول ایراد دارد. «استدلال نادرست»
 $a = 5$ و $c = \frac{9}{5}$ و $d = 1$
 $\frac{5-1}{\frac{9}{5}-1} = 0 \rightarrow 0 = \frac{0-1}{\frac{9}{5}-1} \rightarrow 0 = -\frac{5}{4}$ نادرست

(ب)

۱) $a = \frac{a-d}{c-d}$

۲) $ac - ad = a - d$

۳) $ac - a = ad - d$

۴) $a(c-1) = (a-1)d$

۵) $\frac{a(c-1)}{a-1} = d$ ✗

۶) $-(c-1) = d$

حذف a در مرحله پنجم ایراد دارد. «استدلال نادرست»
 $a = 3$ و $c = \frac{5}{3}$ و $d = 1$

$\frac{3(\frac{5}{3}-1)}{3-1} = 1 \rightarrow -(\frac{5}{3}-1) = 1 \rightarrow -\frac{2}{3} = 1$ نادرست

(ب)

۱) $a = \frac{a-d}{c-d}$

۲) $a(c-d) = a-d$

۳) $ac - a = ad - d$

۴) $ac - a = (a-1)d$

۵) $\frac{ac-a}{a-1} = d$

ایراد ندارد. «استدلال درست»

تمرین

۱. گزاره‌های زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

الف) دو برابر جذر عددی برابر خودش است.

ب) مکعب یک عدد، بزرگ‌تر از هفت برابر آن عدد، به علاوه پنج است.

پ) مجموع معکوس‌های دو عدد بزرگ‌تر با مساوی مجموع آن دو عدد است.

ت) مجموع مکعبات دو عدد بزرگ‌تر با مساوی مکعب مجموع آن دو عدد است.

ث) هر عدد ناصغری از معکوس خود بزرگ‌تر یا مساوی با آن است.

۲. در هر مورد گزاره‌ای همراه با یک استدلال نادرست برای آن داده شده است. دلیل نادرستی استدلال را بیان کنید.

الف) اگر طول و عرض یک مستطیل را دو برابر کنیم، آنگاه مساحت آن نیز دو برابر می‌شود.

x : طول

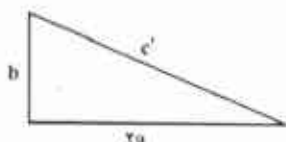
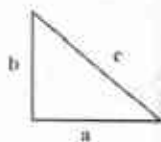
y : عرض

مساحت $S = xy$

مساحت دو برابر شده است. $\rightarrow 2(xy) = 2xy = 2S$

ب) در یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائمه a و b و وتر c همانند شکل زیر اگر ضلع a را دو برابر کنیم، آنگاه وتر آن نیز دو

برابر می‌شود.



استدلال: می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه روبه‌رو قضیه فیثاغورث به صورت زیر برقرار است:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

اکنون این رابطه را برای مثلث قائم‌الزاویه جدید نیز می‌نویسیم:

$$c'^2 = (2a)^2 + b^2 = 4a^2 + b^2 = 4(a^2 + b^2) = 4c^2 \Rightarrow c' = \sqrt{4c^2} \Rightarrow c' = 2c$$

پس وتر دو برابر شده است.

ب) تساوی $\sqrt{\frac{12 \times 3 + 4 \times 16}{6}} = 2\sqrt{11}$ برقرار است.

$$\sqrt{\frac{12 \times 3 + 4 \times 16}{6}} = \sqrt{\frac{12 \times 3^2 + 4 \times 16}{2 \times 3^2}} = \sqrt{\frac{12 + 3^2 \times 16}{3^2}} = \sqrt{12 + 3^2} = \sqrt{44} = \sqrt{4 \times 11} = 2\sqrt{11}$$

حل تمرین صفحه‌ی ۱۸ فصل ۱ (ریاضی و آمار ۲)

۱:

$$\text{الف) } \sqrt{x} = x \quad \text{ب) } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq a + b \quad \text{ت) } x \geq \frac{1}{x}; x \neq 0$$

$$\text{ب) } k^2 > 7k + 5 \quad \text{ت) } \alpha^2 + \beta^2 \geq (\alpha + \beta)^2$$

۲:

الف) استدلال نادرست است. مسئله اشاره به دو برابر کردن اضلاع داشته است. در اینجا مساحت را دو برابر کرده است. می توان با مثال نیز نادرستی استدلال را نشان داد.

$$a = 3 \rightarrow x = 3 \times 2 = 6$$

$$b = 5 \rightarrow y = 5 \times 2 = 10$$

$$a \times b = 3 \times 5 = 15 \quad \text{مساحت مستطیل اولیه}$$

$$x \times y = 6 \times 10 = 60 \quad \text{مساحت مستطیل ثانویه}$$

مشاهده می کنیم که مساحت چهار برابر شده است نه دو برابر

ب) استدلال در مرحله‌ی $4(a^2 + b^2) = 4a^2 + b^2$ باطل می شود. به این مثال توجه کنید.

$$a = 3 \text{ و } b = 5$$

$$4a^2 + b^2 = 4(3)^2 + (5)^2 = 36 + 25 = 61$$

$$4(a^2 + b^2) = 4(3^2 + 5^2) = 4(9 + 25) = 4 \times 34 = 136$$

پ) استدلال در اولین قدم، ساده کردن ۳ از صورت و مخرج باطل می شود. ابتدا باید حاصل صورت را به

دست آوریم و سپس در صورت امکان ساده کنیم.

$$\sqrt{\frac{12 \times 3 + 4 \times 16}{6}} = \sqrt{\frac{36 + 64}{6}} = \sqrt{\frac{100}{6}} = \frac{10}{\sqrt{6}} = \frac{10}{6} \sqrt{6} = \frac{5}{3} \sqrt{6}$$

فصل ۲- تابع

توابع ثابت، چند ضابطه‌ای و همانی

درس ۱

توابع پلکانی و قدرمطلق

درس ۲

اعمال بر روی توابع

درس ۳

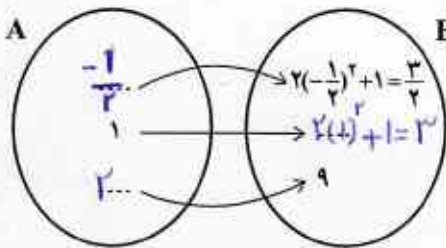
درس ۱

توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی

در سال گذشته با مفاهیم تابع، دامنه و برد آشنا شدیم.

فعالیت

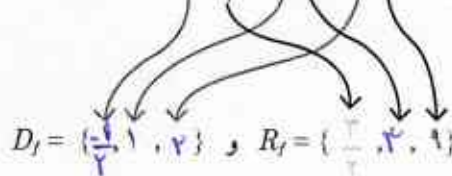
اگر $f: A \rightarrow B$ و $A = \{-\frac{1}{2}, 1, 2\}$ باشد، با توجه به نمایش‌های خوانده‌شده در سال قبل برای بیان یک رابطه:



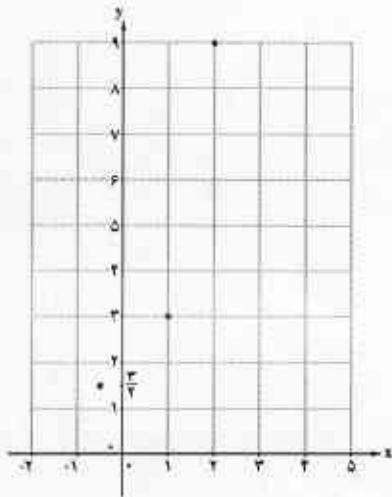
الف. در نمایش یکانی با توجه به ضابطه f و مجموعه A ، داریم:

بنابراین برد f مجموعه $B = \{\frac{3}{4}, 3, 9\}$ است. نمایش یکانی رابطه فوق بیانگر یک تابع است؛ زیرا از هر عضو مجموعه A ، دقیقاً یک پیکان خارج شده است.

ب. نمایش زوج مرتبی مثال بالا به صورت $f = \{(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), (1, 3), (2, 9)\}$ است که:



مجموعه‌های دامنه و برد تابع f را تشکیل می‌دهند.



ج. نمایش مختصاتی آن نیز چنین است؛ تصویر این نقاط بر روی محور x ها؛ یعنی $\{-\frac{1}{2}, 1, 2\}$ دامنه تابع و تصویر همین نقاط بر روی محور y ها $\{\frac{3}{4}, 3, 9\}$ برد تابع نامیده می‌شود.

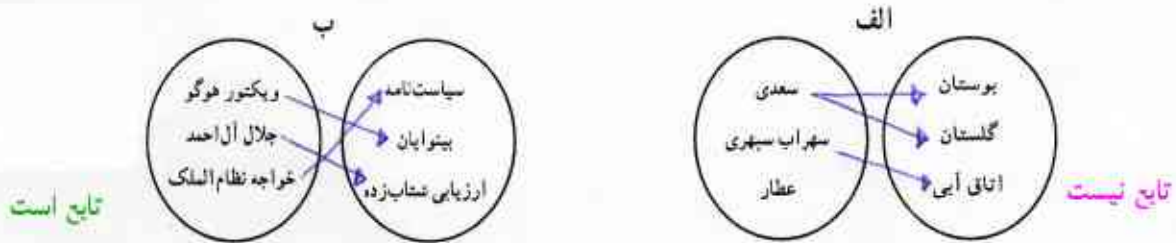
کار در کلاس

ابتدا با پیکان‌های مناسب رابطه خواسته شده را کامل کنید.

۱. رابطه‌ای که به هر استان، شهری از خود استان را نسبت می‌دهد.



۲. رابطه‌ای که به خالق کتاب، کتابش را نسبت می‌دهد.



حال جدول زیر را با توجه به رابطه‌هایی که در قسمت ۱ و ۲ «تایع» هستند، کامل کنید.

نمایش مختصاتی	نمایش زوج مرتبی	نمایش پیکانی	
	<p> $\{ (ریکتور هوگو, سیاست نامه), (جلال آل احمد, بینوایان), (خواجه نظام الملک, ارزیابی تشاب زده) \}$ </p>		۱
	<p> $\{ (سعدی, بوستان), (سهراب سپهری, گلستان), (عطار, اتاق آبی) \}$ </p>		۲

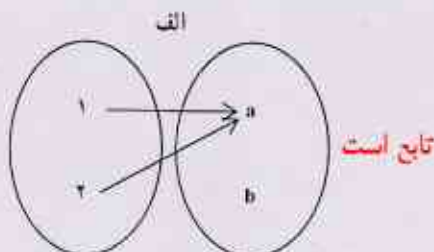
با توجه به جدول بالا:

- الف. نمایش پیکانی یک رابطه، وقتی تایع است که...
 ب. نمایش زوج مرتبی یک رابطه، وقتی تایع است که...
 ج. نمایش مختصاتی یک رابطه، وقتی تایع است که...

به عبارتی دیگر اگر مولفها اول دوزخ مرتب آن سیان باشند، در این صورت مولفها دوم آنها نیز برابر باشند.

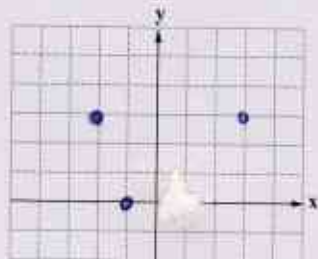
تمرین

۱. کدام یک از رابطه‌های زیر که با نمودار بیکنانی نمایش داده شده‌اند، تابع نیست؟ چرا؟ **تست اب** چون از هر عضو مجموعه اول



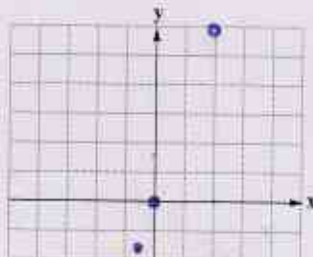
۲. کامل کنید:

$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = x^2 - 1 \end{cases} \quad D_f = A = \{-2, -1, 2\} \quad R_f = \{3, 0, 3\} = \{3, 0\}$$

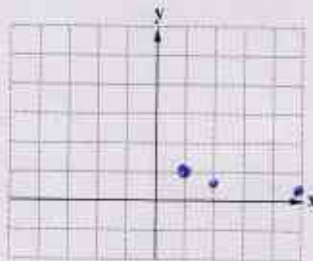


با توجه به ترتیب اعضا در دامنه و برد می توان این تابع را نوشت

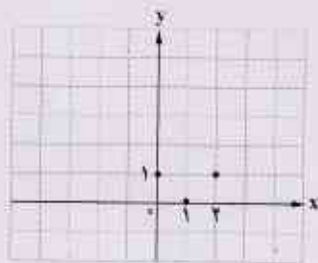
$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = 3^x \end{cases} \quad D_f = \{-\frac{1}{2}, 0, 2\} \quad R_f = \{-\frac{3}{2}, 1, 6\}$$



$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \quad D_f = \{1, 2, 5\} \quad R_f = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}\}$$



$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = (x-1)^2 \end{cases} \quad D_f = \{1, 0, 2\} \quad R_f = \{0, 1\}$$



انواع توابع (ثابت، چندضابطه‌ای و همانی)

یکی از کاربردهای تابع، «مدل‌سازی مسائل واقعی» است. به مثال زیر توجه کنید:

مدیران یک فروشگاه به دلایلی* تصمیم گرفته‌اند هزینه استفاده از توقفگاه فروشگاه را برای مشتریان خود به صورت هوشمند تعیین کنند. پیش از این، هزینه استفاده از توقفگاه ثابت بوده است (مستقل از ساعت و روز هفته).

برای اجرای این تصمیم ابتدا به کمک دوربین‌های مدار بسته، در ورودی توقفگاه و به کمک «روش مشاهده» تعداد خودروهای ورودی در سویمین هفته هر فصل شمارش شده است. با توجه به نبود داده دورافتاده، برای تعیین تعداد خودروهای ورودی در هر ساعت از روزهای کاری فروشگاه از شاخص آماری میانگین استفاده شده است. این اطلاعات در جدول ۱ نمایش داده شده است:

جدول ۱. میانگین ورود خودرو به توقفگاه در هر ساعت کاری فروشگاه

روز هفته	نخستین ساعت	دومین ساعت	سومین ساعت	چهارمین ساعت	پنجمین ساعت	ششمین ساعت	هفتمین ساعت	هشتمین ساعت	نهمین ساعت	دهمین ساعت	یازدهمین ساعت	دوازدهمین ساعت
	(۸-۹)	(۹-۱۰)	(۱۰-۱۱)	(۱۱-۱۲)	(۱۲-۱۳)	(۱۳-۱۴)	(۱۴-۱۵)	(۱۵-۱۶)	(۱۶-۱۷)	(۱۷-۱۸)	(۱۸-۱۹)	(۱۹-۲۰)
شنبه	۳۰	۴۰	۵۰	۴۰	۵۰	۴۰	۳۰	۲۰	۵۰	۵۰	۵۰	۶۰
یکشنبه	۱۱۰	۱۳۰	۱۵۰	۱۶۰	۱۵۰	۱۴۰	۱۳۰	۱۴۰	۱۶۰	۱۷۰	۱۷۰	۱۶۰
دوشنبه	۲۱۰	۲۱۰	۲۳۰	۲۱۰	۲۳۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۱۰	۲۳۰	۲۴۰	۲۳۰	۲۵۰
سه‌شنبه	۱۲۰	۱۱۰	۱۸۰	۱۸۰	۱۸۰	۱۶۰	۱۵۰	۱۴۰	۱۴۰	۱۴۰	۱۴۰	۱۴۰
چهارشنبه	۳۰	۴۰	۹۰	۹۰	۶۰	۵۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۵۰	۲۹۰	۵۷۰	۶۸۰
پنجشنبه	۲۰	۱۲۰	۲۳۰	۲۳۰	۲۱۰	۵۱۰	۶۱۰	۷۲۰	۸۹۰	۹۳۰	۱۰۷۰	۱۱۲۰
جمعه	۱۲۰	۲۱۰	۲۴۰	۲۲۰	۵۱۰	۶۲۰	۷۱۰	۸۲۰	۹۴۰	۱۰۹۰	۵۲۰	۴۱۰

با در نظر گرفتن جدول ۱، هزینه توقفگاه از روز شنبه تا چهارشنبه مطابق جدول ۲ تعیین شده است:

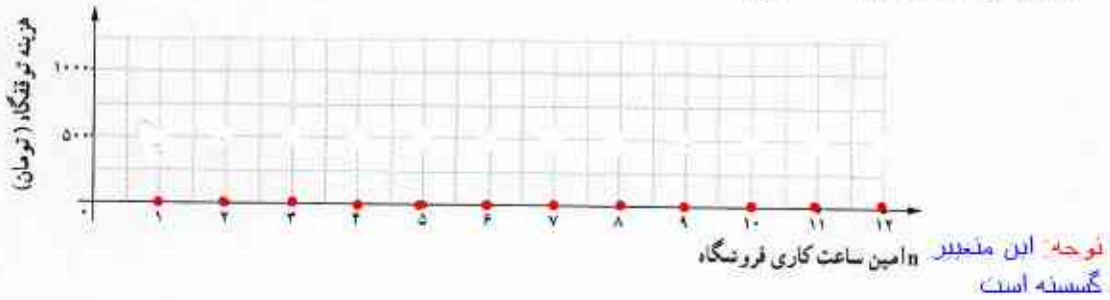
جدول ۲. هزینه توقفگاه با توجه به میانگین خودروهای ورودی

میانگین خودروهای ورودی در هر ساعت	هزینه دریافتی از هر خودرو (تومان)
۰-۱۰۰	(رایگان)
۱۰۰-۲۰۰	۵۰۰ تومان
۲۰۰-۳۰۰	۱۰۰۰ تومان
۳۰۰-۴۰۰	۱۵۰۰ تومان
۴۰۰-۵۰۰	۲۰۰۰ تومان
۵۰۰-۶۰۰	۲۵۰۰ تومان
۶۰۰-۷۰۰	۳۰۰۰ تومان

* ۱. در زمان‌هایی که تعداد مشتریان فروشگاه فراوان نیست، هزینه اندک توقفگاه می‌تواند تسویفی برای خرید از فروشگاه نزد مشتریان باشد.
 ۲. در زمان‌هایی که تعداد مشتریان فروشگاه فراوان است، هزینه بالاتر استفاده از توقفگاه درآمد بیشتری را برای فروشگاه فراهم می‌کند.
 ۳. در زمان‌هایی که تعداد مشتریان از ظرفیت پذیرش فروشگاه بیشتر است و این مسئله باعث تعجیل مشتریان در خرید از فروشگاه می‌شود، سوق دادن بخشی از این مشتریان به ساعت‌های خلوت فروشگاه به دلیل هزینه رایگان یا اندک توقفگاه می‌تواند در افزایش درآمد فروشگاه بسیار تأثیرگذار باشد. به بیان دیگر تنها هزینه متغیر توقفگاه به تنهایی می‌تواند درآمد فروشگاه را ارتقا بخشد. بلکه این مسئله بر میزان خرید مشتریان از فروشگاه نیز تأثیرگذار است که نتیجه آن سود بیشتر فروشگاه خواهد بود.

تابع ثابت (Constant Function)

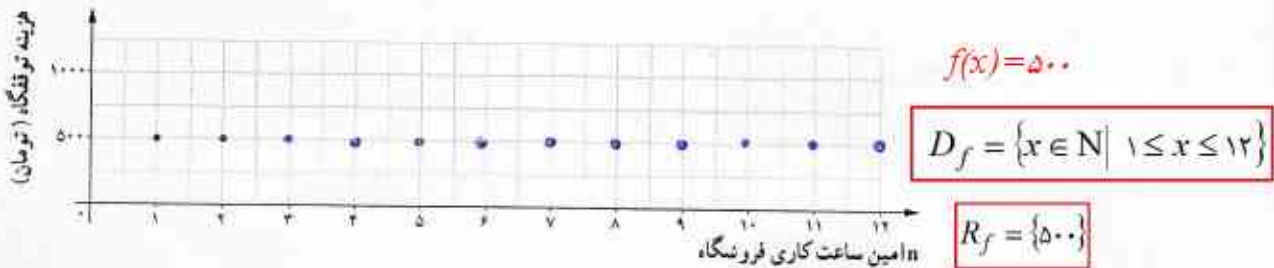
بر اساس اطلاعات آماری جدول ۱ و ۲، نمودار « n امین ساعت کاری فروشگاه - هزینه دریافتی» را برای روزهای شنبه تا چهارشنبه در نخستین هفته هوشمندسازی رسم می‌کنیم.^۱
 شنبه: در نخستین روز هفته تعداد خودروهای ورودی به پارکینگ همواره در دسته « $1 = 0$ » قرار می‌گیرند. بنابراین مطابق جدول دو، نمودار زیر به دست می‌آید:



این نوع تابع که به ازای $n = 1$ تا $n = 12$ یعنی در تمام ۱۲ ساعت کاری فروشگاه، مقدار ثابت صفر را اختیار کرده است، تابع ثابت نامیده می‌شود. پس ضابطه تابع «هزینه توقفگاه» در این روز به صورت $C(n) = 0$ است که در آن $D = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 12\}$ دامنه تابع و $R = \{0\}$ برد تابع C را تشکیل می‌دهند.

کار در کلاس

یک شنبه: با توجه به میانگین خودروهای ورودی در جدول ۱ و هزینه دریافتی مطابق جدول ۲، نمودار زیر را کامل کنید.



تابع $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = c \end{cases}$ را که در آن مجموعه $R = \{c\}$ برد تابع است، تابع ثابت می‌نامند. در تابع ثابت، برد تابع تنها شامل یک عضو است.

۱. با توجه به آنکه مدت زمانی طول می‌کشد تا مشتریان فروشگاه از نرخ جدید هزینه توقفگاه آگاهی یابند در نخستین هفته هوشمندسازی توقفگاه، میانگین ورودی خودرو تغییر محسوسی نکرده است و اطلاعات جدول ۱ در این هفته معتبر است.

کلمه: (۱۶ ساعت متغیر بسته است)

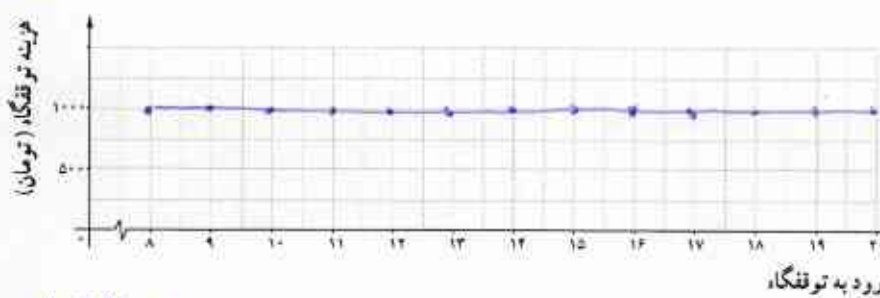
لازم به ذکر است دانش آموزان در سال گذشته بسته بندی منحصر کمی یعنی گسسته و پیوسته را نخوانده اند

فعالیت

دوشنبه: با استفاده از جدول ۱ و ۲ همانند روزهای شنبه و یکشنبه، نمودار زیر را برای روز دوشنبه کامل کنید و دامنه و برد و ضابطه تابع را مشخص کنید.

توجه داشته باشید که در این نمودار محور x برخلاف روزهای شنبه و یکشنبه بیانگر زمان ورود خودرو به توقفگاه است.

$$\begin{cases} C: A \rightarrow B \\ C(x) = 1000 \end{cases} \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid 8 \leq x \leq 12\} \quad R = \{1000\}$$



کلمه: نمودار روز دوشنبه هم صورت

خطی رسم میشد (زمان متغیر پیوسته است)

دانش آموزان در روز

دوشنبه متعلق به قطعه ای از

مجموعه اعداد حقیقی است زمان ورود به توقفگاه

دامنه نمودار در روز دوشنبه چه تفاوتی با دامنه نمودار در روزهای شنبه و یکشنبه دارد؟

تفاوت این دامنه ها چه تأثیری بر نمودار تابع دارد؟ چرا؟

رسم میشد (زمان متغیر پیوسته است) دی

(Discontinuous Function) تابع

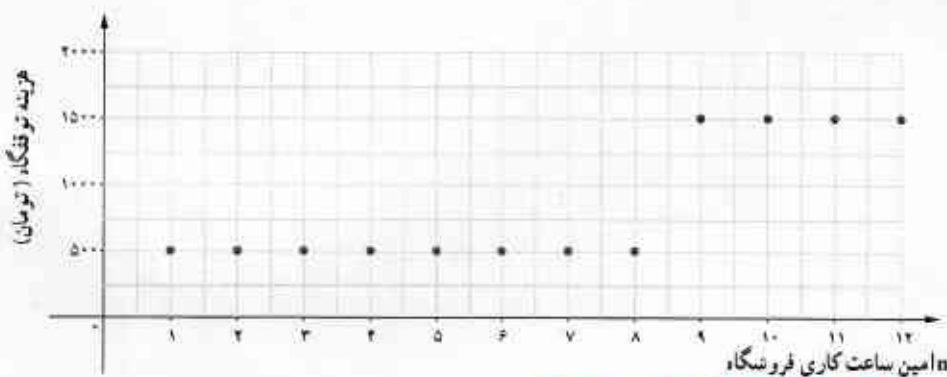
سهشنبه: با بررسی جدول ۱ تعداد خودروهای ورودی از نه

۲۰۰-۱۰۰ و در چهار ساعت پایانی کاری فروشگاه در دسته ۴۰۰-۳۰۰ قرار می گیرد. با در نظر گرفتن جدول ۲، هزینه

استفاده از توقفگاه برای خودروها در این روز از این تابع پیروی می کند:

$$C(n) = \begin{cases} 500 & 1 \leq n \leq 8 & (1) \\ 1500 & 9 \leq n \leq 12 & (2) \end{cases}$$

که ضابطه ۱ مربوط به ساعت ورودی اول تا هشتم و ضابطه ۲ مربوط به ساعت ورودی نهم تا دوازدهم است و نمودار آن:



(که اشتراک آنها تهی است)

توابعی که در بخش های مختلف دامنه، ضابطه های مختلف دارند، توابع چند ضابطه ای نامیده می شوند؛ مثلاً اگر یک تابع از دو ضابطه پیروی کند، یک تابع **ب** ضابطه ای نامیده می شود.

دامنه نمودار روز دوشنبه متعلق به قطعه ای از مجموعه اعداد حقیقی است در صورتی که دامنه نمودار های روز شنبه و یکشنبه متعلق به قطعه ای از مجموعه ی اعداد طبیعی است.

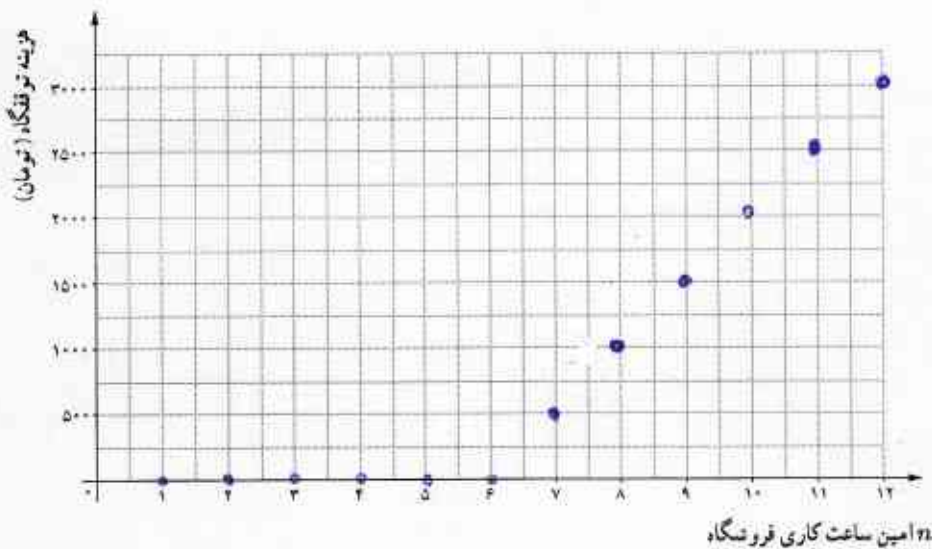
نمودار روز دوشنبه نقاط روی یک خط است که به هم وصل می شوند. اما نمودار های روز شنبه و یکشنبه نقاطی هستند که روی یک خط هستند و به هم وصل نمی شوند.

کار در کلاس

چهارشنبه: در این روز با توجه به جدول ۱ و ۲ ضابطه تابع به صورت زیر مشخص می شود:

$$C(n) = \begin{cases} 0 & 1 \leq n \leq 6 \\ 500 & n = 7 \\ 1000 & n = 8 \\ 1500 & n = 9 \\ 2000 & n = 10 \\ 2500 & n = 11 \\ 3000 & n = 12 \end{cases} \Leftrightarrow C(n) = \begin{cases} 0 & 1 \leq n \leq 6 \\ (n-6) \times 500 & 7 \leq n \leq 12 \end{cases}$$

۱. نمودار این تابع را رسم کنید:

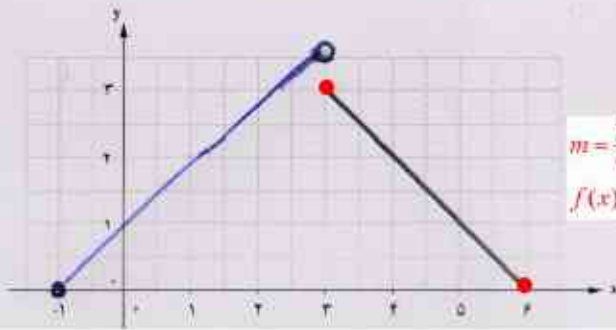


۲. درآمد توقفگاه فروشگاه در این روز چقدر است؟

$$\begin{aligned} \text{درآمد توقفگاه} &= 500 \times 180 + 1000 \times 170 + 1500 \times 160 + 2000 \times 150 + 2500 \times 140 \\ &+ 3000 \times 130 = 533000 \end{aligned}$$

تذکره: طبق ضابطه تابع درآمد کارگاهس هفت روز بازرگانی در اولین ساعت کاری هفت روز است و در هفتین ساعت، میانگین ورود خودرو در روز ۲۸ بار طبق جدول ۱، برابر ۱۸۰ است پس با توجه به ضابطه تابع درآمد کارگاهس، ۵۰۰ را در ۱۸۰ ضرب کنیم و برای ساعت بعدی همین طور (میانگین خودرو ورودی را در هفتین بار که با توجه به تابع درآمد کارگاهس نوشته فریب می کنیم و بعد همگی را با هم جمع می کنیم)

کار در کلاس



ضابطه تابع و نمودار آن را کامل کنید.
در سال گذشته دانش آموزان به این روش حل می کردند.

$$m = \frac{3-0}{3-(-1)} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

$$f(x) = mx + h \Rightarrow f(3): -\frac{3}{4}(3) + h = 3 \Rightarrow h = 3 + \frac{9}{4} \Rightarrow h = \frac{21}{4} \Rightarrow f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{21}{4}$$

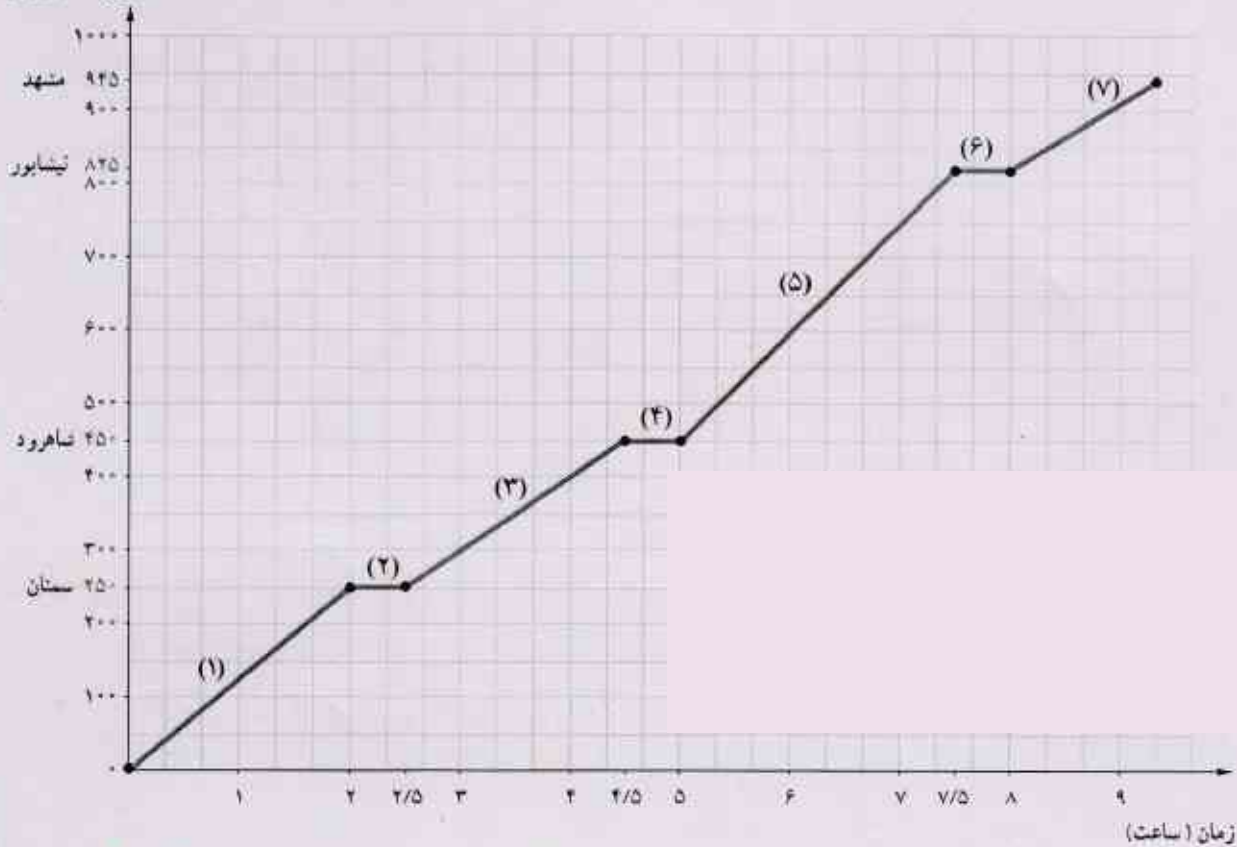
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 3 \\ -x+7 & 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

فعالیت

نمودار زیر قطاری را نشان می دهد که از تهران به مشهد رفته است.

- مفهوم قسمت هایی که نمودار تابع ثابت است چیست؟ **توقف در ایستگاه**
- ضابطه تابع «مکان-زمان» قطار از لحظه رسیدن به شاهرود تا لحظه ترک نیشابور را به دست آورید.
- اگر قطار مطابق ضابطه بخش ۵ و بدون توقف در نیشابور به مسیر خود ادامه دهد، در چه زمانی به مشهد می رسد؟

مسافت طی شده (کیلومتر)



پایه ۳، ۱۰، ۱۵: صحنه های خط (۱۵)

$$150 \cdot x - 200 = 945 \rightarrow \text{رسیدن به مشهد}$$

$$150 \cdot x = 1145 \rightarrow x = \frac{1145}{150} = 7.63$$

$$x = 8 + \frac{1}{3} \times 20 = 10 \text{ ساعت}$$

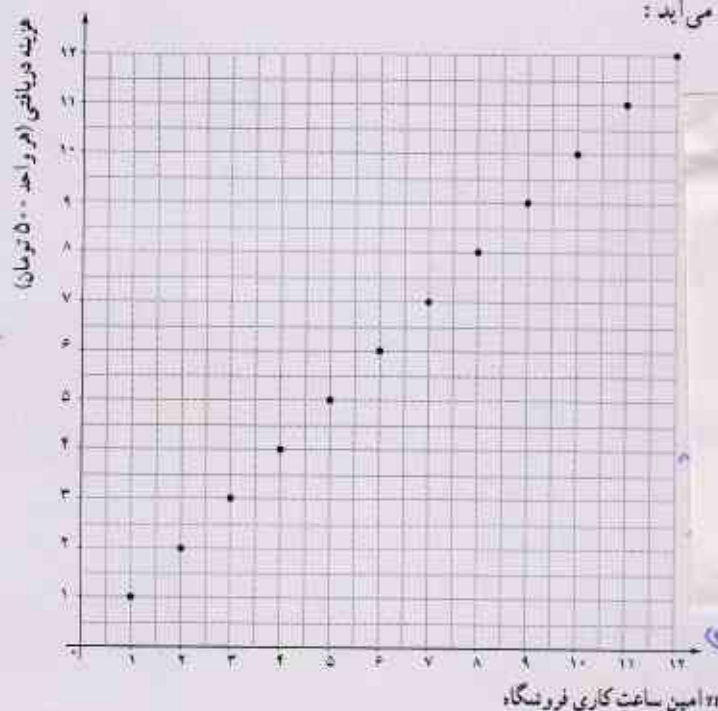
$$f(x) = \begin{cases} 450 & 4.5 \leq x < 5 \\ 150x - 200 & 5 \leq x < 7.5 \\ 825 & 7.5 \leq x < 8 \end{cases}$$

به وقتی که ساعت

تابع همانی (Identity Function)

فعالیت

پنج سئبه: به دلیل افزایش مرتب خودروهای ورودی از نخستین ساعت کاری تا دوازدهمین ساعت کاری فروشگاه، مدیران شرکت تصمیم گرفته‌اند که از یک مدل «تابع خطی» برای دریافت هزینه از خودروها استفاده کنند. به این معنا که اگر خودرو در n امین ساعت کاری وارد توقفگاه شود، هزینه دریافتی n واحد (هر واحد ۵۰۰ تومان) باشد. بنابراین نمودار زیر به دست می‌آید:



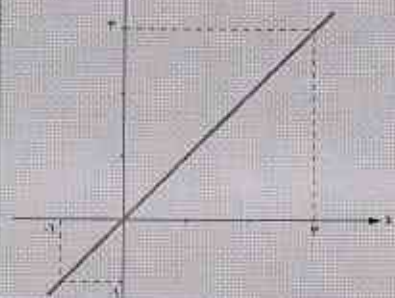
$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (7,7), (8,8), (9,9), (10,10), (11,11), (12,12)\}$$

دامنه
 $A = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$
 برد
 $A = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$

کدام هر واحد ۵۰۰ تومان است برای همین
 واحد ۵۰۰ تومان با هم برابرند

مجموعه نقاط نمودار را به صورت زوج مرتب نشان دهید و دامنه و برد آن را تعیین کنید. چه رابطه‌ای میان دامنه و برد این تابع به هم برابرند برقرار است؟ آیا می‌توانید ضابطه این تابع را حدس بزنید؟ $y = x$
 اگر این مجموعه نقاط را در نمودار به یکدیگر وصل کنیم، این نمودار بیانگر چه مفهومی است؟ در این حالت دامنه و برد آن چه تغییری می‌کند؟

این تابع هر عدد حقیقی را به همان عدد حقیقی نظیر می‌کند. - دامنه و برد آن نقطه‌ای از مجموعه اعداد حقیقی می‌سود



تابع با ضابطه $f(x) = x$ را تابع همانی می‌نامند. با توجه به ضابطه تابع، در تابع همانی دامنه و برد همواره با یکدیگر برابرند. از لحاظ هندسی نمودار این تابع نیمساز ناحیه اول و سوم است.

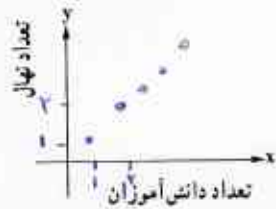
$$D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \mathbb{R}$$

تمرین

۱. با توجه به معرفی محور x و y در هر دستگاه مختصات، با هر کدام از توضیحات زیر کدام یک از توابع ثابت، چند ضابطه‌ای یا همانی معرفی می‌شود؟ نمودار هر حالت را با توجه به توضیحات کامل کنید.

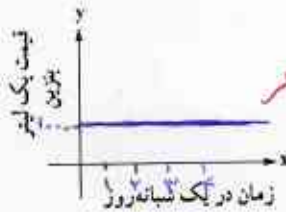
الف. به مناسبت روز درخت‌کاری، در یک مدرسه هر دانش‌آموز یک نهال می‌کارد. *باج همای*

$$f(n) = n$$



ب. هزینه یک لیتر بنزین عادی در هر زمان از شبانه‌روز در یک پمپ بنزین ۱۰۰۰ تومان است. *باج است چون قیمتش در ساعت ثابت است*

$$f(n) = 1000$$



ج. برای هر یک متر مربع نقاشی یک ساختمان یک قوطی رنگ کوچک استفاده می‌شود. *باج همای است*

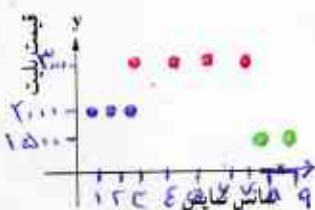
$$f(n) = n \quad \left(\begin{array}{l} \text{برای هر سطح زده شده مساحت یک قوطی است} \\ \text{این نمودار نیز از ربع اول دوم باید شود} \end{array} \right)$$



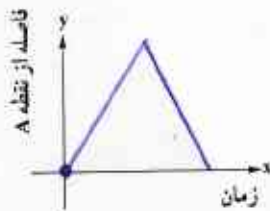
د. بلیت یک سینما در سه سانس اول ۲۰۰۰ تومان، در چهار سانس بعدی ۳۰۰۰ تومان و در دو سانس آخر ۱۵۰۰ تومان است. *باج چند ضابطه‌ای*

$$\left(\text{چون سانس‌ها سه سانس بنیادین تقسیم‌ناپذیر است} \right)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2000 & x = 1, 2, 3 \\ 3000 & x = 4, 5, 6, 7 \\ 1500 & x = 8, 9 \end{cases}$$



ه. دو نده‌ای، کنار یک زمین فوتبال، با سرعت ثابت از نقطه A تا نقطه B شروع به دویدن می‌کند و دوباره به نقطه A برمی‌گردد.



باج چند ضابطه‌ای است

(از نقطه A با سرعت ثابت در یک زمان مشخص به B می‌رسد و دوباره از B با همان سرعت ثابت و در یک زمان مشخص دیگر به همان نقطه A برمی‌گردد)

۲. کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟ چرا؟

$f = \{(1,3), (2,1)\}$ بر $R = \{1,2\}$ $D = \{1,2\}$

الف. اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند، آن تابع همانی است.

ب. اگر دامنه یک تابع همانی مجموعه اعداد حقیقی باشد، آن گاه حاصل $f(x) + f(-x)$ همواره برابر صفر است.

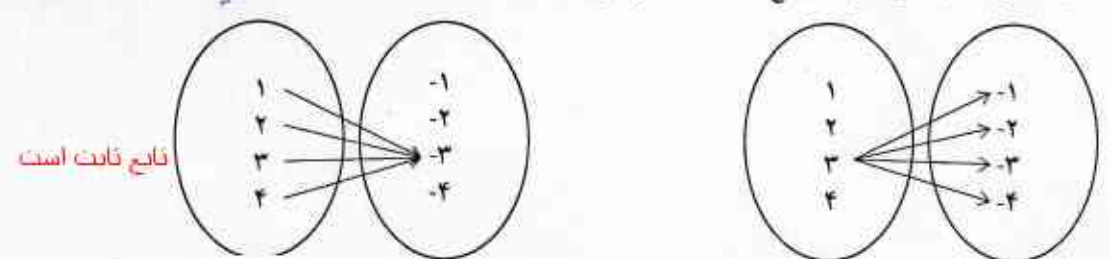
ج. اگر f یک تابع ثابت باشد، آن گاه $f(kx) = kf(x)$ $f(kx) = kf(x)$ $f(kx) = c \Rightarrow f(kx) = c$

۳. اگر $A = \{(2, b), (a, 4), (7, a+b)\}$ یک تابع ثابت باشد، مقدار a کدام است؟
 $a+b=4 \Rightarrow a+4=4 \Rightarrow a=4-4=0 \Rightarrow a=0$

۴. اگر $A = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$ یک تابع ثابت باشد، میانگین، میانه و واریانس مقادیر y_1, y_2, y_3 را به دست آورید.

$y_1 = y_2 = y_3 = c \Rightarrow \bar{y} = \frac{c+c+c}{3} = c$

۵. کدام یک از نمایش‌های بیکنی زیر یک تابع ثابت را معرفی می‌کند؟



۶. در تابع ثابت $f(x) = c$:

الف. $f(a) = f(b) = f(a+b) = c$

ب. اگر در این تابع $f(a+b) = f(a) \times f(b)$ باشد، c چه مقادیری را اختیار می‌کند؟

$c = c \times c \Rightarrow c = c^2 \Rightarrow c^2 - c = 0 \Rightarrow c(c-1) = 0 \Rightarrow c = 0$ or $c = 1$

۷. اگر $A = \{(a, 1), (b, 2), (c, 5)\}$ یک تابع همانی باشد، میانگین a و b و c را به دست آورید.

$a=1, b=2, c=5 \Rightarrow \text{میانگین} = \frac{1+2+5}{3} = \frac{8}{3}$

۸. در هر یک از زوج مرتب‌های زیر $n \in \mathbb{N}$ را به گونه‌ای تعیین کنید که زوج مرتب داده شده روی نیمساز ناحیه اول و سوم n مولفه‌ها اول و دوم آن باشد.

الف) $(2, n^2 - 3n + 4)$ $n^2 - 3n + 4 = 2 \Rightarrow n^2 - 3n + 2 = 0 \Rightarrow (n-2)(n-1) = 0 \Rightarrow n=2$ or $n=1$

ب) $(-1, n^2 - 4n + 2)$ $n^2 - 4n + 2 = -1 \Rightarrow n^2 - 4n + 3 = 0 \Rightarrow (n-3)(n-1) = 0 \Rightarrow n=3$ or $n=1$

۹. اگر f یک تابع ثابت با دامنه دو عضوی و $n \in \mathbb{N}$ و m باشد، مقدار $m+t$ را به دست آورید.

$f = \{(-1, n^2 - 2n), (m-4, 3), (m+n, t)\}$ $n^2 - 2n = 3 \Rightarrow n^2 - 2n - 3 = 0 \Rightarrow (n-3)(n+1) = 0 \Rightarrow n=3$ or $n=-1$

$m-4 = -1 \Rightarrow m = 3$ $m+t = 3+3 = 6$

۱۰. ضابطه تابع زیر را مشخص کنید.

$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 2 \\ 2 & x > 2 \end{cases}$



توجه: در سوال ۹ بدست آوردن مقدار $m+t$ ضرورت نداشت بهتر بود سوال چنان طراحی می شد که مقدار پارامترها برابر نباشد

ادامه یا هیچ سوال $(30 + 40 + 9 \times 2 + 70 + 50) \times 5 + 110 \times 8 + 270 \times 1 + 350 \times 10 + 490 \times 2 + 570 \times 10 + 680 \times 3 + \dots = 5320 \dots$

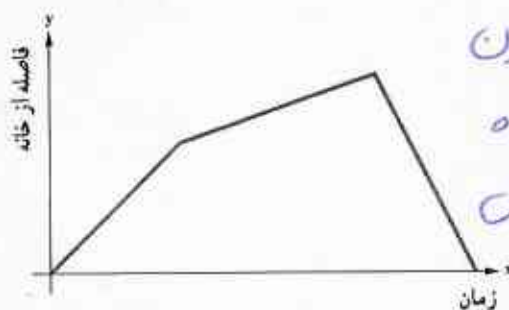
کل درآمد برابر است 115250

تیبیه ما سیم درآمد بسیار هستند سایر بیشتر است (14)

۱۱. در تابع $f(x) = \begin{cases} x & x < -1 \\ x^2 & -1 \leq x \leq 2 \\ 5 & x > 2 \end{cases}$ حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$f(2) = 2^2 = 4$ $f(3) + f(-1) = 5 + (-1)^2 = 4$ $f(-\sqrt{2}) + f(\sqrt{2}) = -\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = -\sqrt{2} + 2 = 2 - \sqrt{2}$ $f(\sqrt{2}) + f(5) = (\sqrt{2})^2 + 5 = 2 + 5 = 7$

۱۲. نمودار زیر به کدام داستان مربوط است؟



به سمت ج مربوط می شود چون سرعت زیاد شدن نمودار کم نه این همان جا نیست که دوستش رو در حال دیدن بر خورد کرد

- الف. آوا و مادر بزرگش برای قدم زدن در بوستان، از خانه خارج شدند. آنها در ابتدا آهسته قدم می زدند و سپس سرعتشان را بیشتر کردند تا به بوستان رسیدند. سپس، از مسیری که آمده بودند، برگشتند و به خانه رسیدند.
- ب. علی با دوچرخه اش از خانه به سمت بالای تپه روبه روی خانه شان حرکت کرد. پس از مدتی شیب تپه کمتر شد تا به بالای تپه رسید. سپس از آنجا از سمت دیگر به پایین تپه سرازیر شد.
- ج. محمدرضا برای دویدن روزانه اش از خانه خارج شد. هنگام دویدن با دوست خود که در حال دویدن بود، برخورد کرد که باعث شد از سرعت دویدنش کم شود؛ اما بعد از آن با سرعت بیشتری به سمت خانه حرکت کرد و به خانه رسید.

۱۳. اگر هزینه توقفگاه در روز جمعه بر اساس مدت زمان سپری شده از بازگشایی فروشگاه از ساعت ۸ صبح از تابع

$$C(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 2 \\ x+1 & 2 \leq x < 10 \\ 0 & 10 \leq x \leq 12 \end{cases}$$



- بیروی کند، با رسم نمودار تابع، هزینه توقفگاه هر خودرو را با توجه به ساعت و زمان ورودش به توقفگاه به کمک نمودار تابع محاسبه کنید. (هر واحد بر روی محور yها معادل ۵۰۰ تومان است).
۱۴. درآمد فروشگاه از توقفگاه را از روز شنبه تا چهارشنبه در دو حالت زیر مقایسه کنید.

- الف. قبل از هوشمندسازی و بر اساس هزینه ثابت ۷۰۰ تومان برای هر خودرو که مستقل از روز و ساعت ورود به توقفگاه است.
- ب. بر اساس هوشمندسازی

در هر دو حالت از اطلاعات جدول ۱ استفاده کنید. $(30 \times 3 + 40 \times 3 + 50 \times 5 + 70) \times 700 = 344000$ شنبه

حل تمرین جدول اجباری نیست. $(110 + 130 \times 2 + 140 \times 2 + 150 \times 2 + 160 \times 3 + 170 \times 2) \times 700 = 21239000$ یکشنبه

$(210 \times 4 + 230 \times 2 + 200 \times 2 + 240 \times 2 + 250) \times 700 = 1862000$ دوشنبه

$(120 + 110 + 180 \times 2 + 170 + 150 + 140 + 320 + 340 \times 2 + 370) \times 700 = 1806000$ سه شنبه

$(30 + 40 + 9 \times 2 + 70 + 50 + 110 + 270 + 350 + 490 + 570 + 680) \times 700 = 2035000$ چهارشنبه

شنبه $(30 \times 3 + 40 \times 3 + 50 \times 5 + 70) \times 500 = 0$

یکشنبه $(110 + 130 \times 2 + 140 \times 2 + 150 \times 2 + 170 \times 3 + 170 \times 2) \times 500 = 885000$ کل درآمد برابر است 17301000

دوشنبه $(210 \times 4 + 230 \times 2 + 200 \times 2 + 240 \times 2 + 250) \times 1000 = 2472000$

درس ۲

توابع پلکانی و قدر مطلق

تابع پلکانی (Step Function)

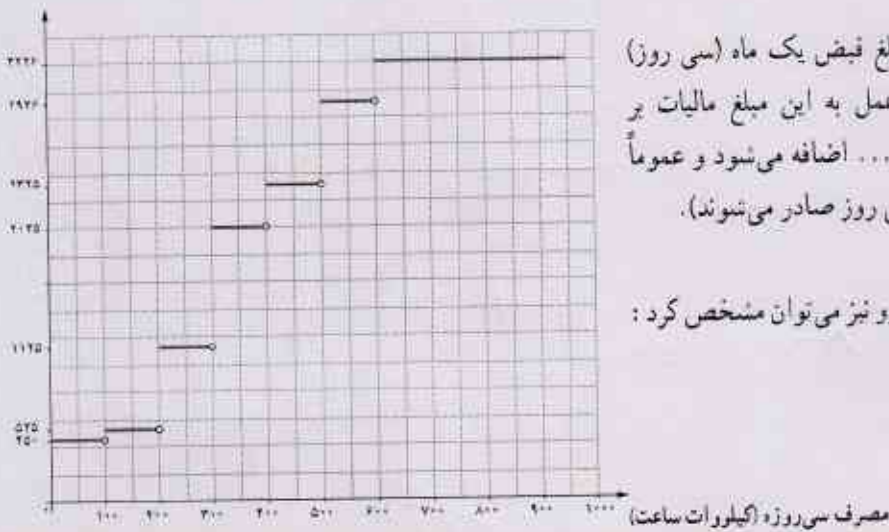
روش محاسبه قبض برق

محاسبه هزینه برق مصرفی در هر خانه بر اساس میزان «کیلووات ساعت» برقی است که در هر سی روز در یک خانه مصرف می‌شود. یک کیلووات ساعت (kwh) در واقع مصرف یک وسیله هزار وات در مدت زمان یک ساعت است، مثلاً اگر ۱۰ لامپ صد وات را به مدت یک ساعت روشن کنیم، یک کیلووات ساعت برق مصرف کرده‌ایم.

مبلغ ۴۰ روزه	میزان مصرف ۳۰ روزه	میزان مصرف ۴۰ روزه	مبلغ ۴۰ روزه
۲۵۰۰۰	۹۰۰	۴۵۰	مصرف ۱۰ تا ۳۰۰
۲۴۵۰۰	۹۰۰	۵۲۵	میزان ۳۰۰ تا ۹۰۰
۲۴۰۰۴	۹۰۰	۶۰۰	میزان ۹۰۰ تا ۳۰۰
۰	۰	۶۰۰	میزان ۳۰۰ تا ۴۰۰
۰	۰	۶۴۲۵	میزان ۴۰۰ تا ۵۰۰
۰	۰	۶۹۴۸	میزان ۵۰۰ تا ۶۰۰
۰	۰	۷۴۶۶	میزان ۶۰۰ تا ۷۰۰

اگر فرض کنیم مصرف برق یک خانه در سی روز $246/23 \text{ kwh}$ بوده است، برای محاسبه هزینه مصرف برق، میزان کیلووات ساعت مصرفی مطابق این جدول به صورت پلکانی تقسیم می‌شود.

هزینه پلکانی برق (ریال)



مجموع مبالغ ستون آخر، مبلغ قبض یک ماه (سی روز) را مشخص می‌کند (البته در عمل به این مبلغ مالیات بر ارزش افزوده و عوارض برق و... اضافه می‌شود و عموماً قبض‌های برق برای بیشتر از سی روز صادر می‌شوند).

جدول بالا را با نمودار روبه‌رو نیز می‌توان مشخص کرد:

نمودار بالا نمودار یک تابع چندضابطه‌ای است که در هر ضابطه مقدار تابع عددی ثابت است. این نوع توابع را توابع پلکانی می‌نامند.

فعالیت

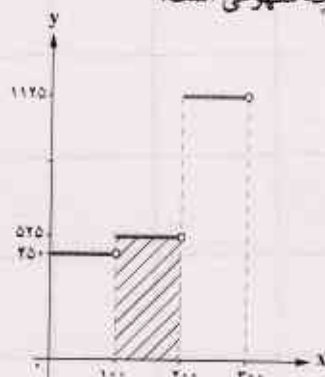
به کمک نمودار پلکانی رسم شده برای محاسبه هزینه برق مصرفی یک خانه:

۱. هزینه 1000 kWh اول چگونه محاسبه می شود؟ آیا می توانیم مساحتی را در نمودار داده شده، مشخص کنیم که این هزینه را

تعیین کند؟

$$1000 \times 45 = 45000$$

۲. مساحت قسمت هاشور خورده زیر بیانگر چه مفهومی است؟

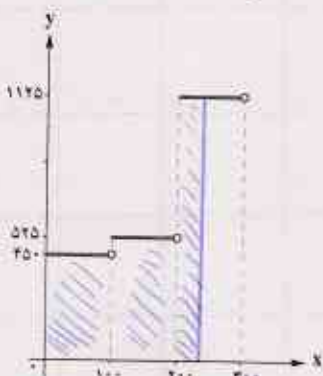


هزینه مازاد بر مصرف

$$(1000 - 200 \text{ kWh})$$

۳. هزینه کل برق مصرفی این خانه معادل چه مساحتی است؟ این مساحت را هاشور بزنید و مقدار هزینه را مشخص کنید.

با توجه به جدول مصرف برق خانه



$$100 + 100 + 492.5 = 2492.5$$

$$100 \times 45 + 100 \times 52.5 + 492.5 \times 112.5$$

$$= 45000 + 52500 + 52000 \times 1.125$$

$$= 149250$$

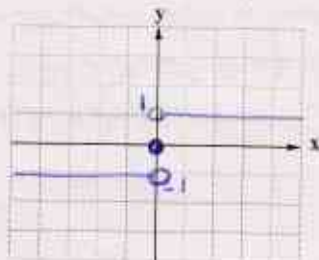
← (مساحت جدول مصرفی)

تابع علامت (Sign Function)

کار در کلاس

بر اساس ضابطه تابع پلکانی $y=f(x)$ ، نمودار آن را رسم کنید. دامنه و برد آن را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



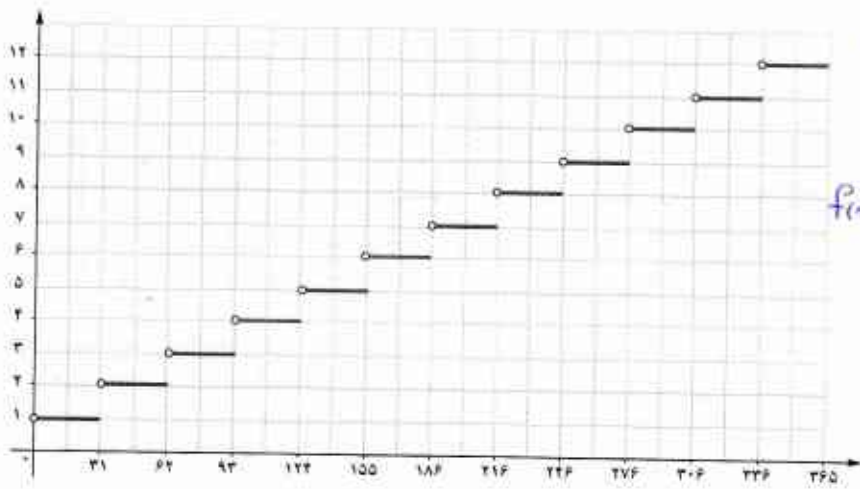
دامنه $D_f = \mathbb{R}$

برد $R_f = \{1, 0, -1\}$

تابع بالا را تابع علامت یا تابع $y = \text{sign}(x)$ می نامند.

کار در کلاس

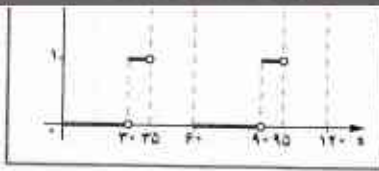
۱. نمودار زیر مدل ریاضی چه مفهومی را بیان می‌کند؟ محورهای x و y بیانگر چه کمیت‌هایی هستند؟ واحدهای آنها را مشخص کنید. ضابطه تابع را بنویسید؟ **تعداد روزها در ماه‌های مختلف سال - x بیانگر روزها و y بیانگر**



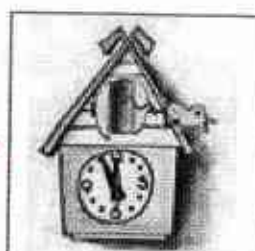
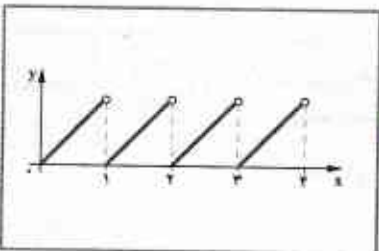
$$f(x) = \begin{cases} 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x < 3 \\ \vdots & \vdots \\ 12 & 12 \leq x < 13 \end{cases}$$

۲. هر کدام از نمودارهای توابع سمت چپ را به تصویری که بیانگر آن مفهوم است، مرتبط کنید.

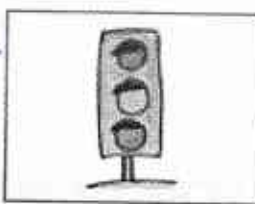
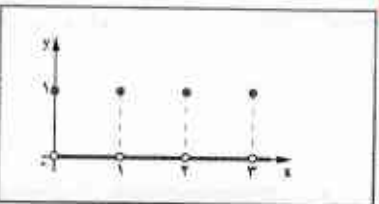
معمودار سوم: مربوط به سازه داخلی ساعت، بیرون ساعت، فقط رأس هر ساعت بیرون می‌آید و تغییر زمان، رأس ساعت



ثابت از قسمت بالا در مدت یک ساعت به قسمت پایین می‌ریزد.



پرنده‌ای که در یک ساعت دیواری در رأس هر ساعت از ساعت بیرون می‌آید.



چراغ راهنمای و راهنمایی سه حالت.

نمودار سوم: مربوط به ساعت دیواری است چون مکان پرنده ثابت است فقط رأس هر ساعت بیرون می‌آید یعنی مکان آن تغییر می‌کند

معمودار اول: مربوط به چراغ راهنمای و راهنمایی: در هر اول محور x بیانگر زمان و محور y بیانگر تعداد چراغ راهنمای است (چراغ راهنمای و راهنمایی سه حالت دارد)

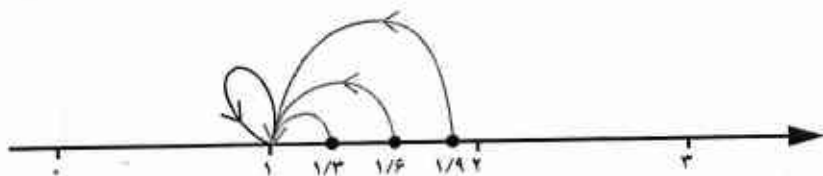
معمودار دوم: مربوط به ساعت شمس و قمری: سرعت ثابت در دوران محور x بیانگر زمان است و محور y بیانگر ارتفاع است. در هر دقیقه ارتفاع آن تغییر می‌کند.

تابع جزء صحیح (Greatest Integer Function)

فعالیت

فرض کنید g تابعی است که به هر عدد صحیح، خود همان عدد را نسبت می‌دهد و به هر عدد بین دو عدد صحیح متوالی، عدد صحیح کوچک‌تر را نسبت می‌دهد.

برای مثال، در این تابع اگر x عدد صحیح ۱ انتخاب شود یا عددی بین ۱ و ۲ باشد، تابع g ، این اعداد را به عدد ۱ نسبت می‌دهد. به بیانی دیگر:



(شکل ۱)

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow g(x) = 1$$

مطابق تعریف تابع g ، اگر x عددی بین دو عدد صحیح متوالی -2 و -3 باشد، این تابع مقادیر x را به عدد -3 نسبت می‌دهد (شکل ۲).

و اگر x عددی بین اعداد 2 و 3 باشد، این تابع مقادیر x را به عدد 2 نسبت می‌دهد (شکل ۳).



$$-3 \leq x < -2 \Rightarrow g(x) = -3$$

(شکل ۲)


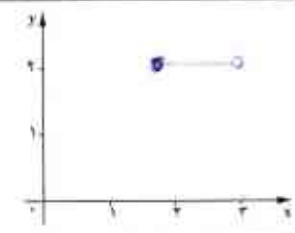

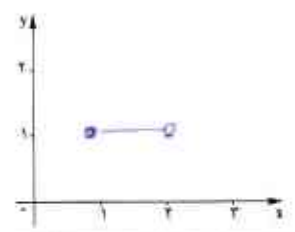

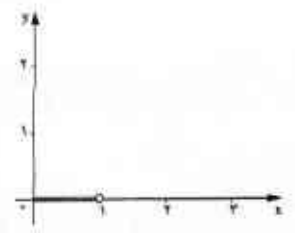



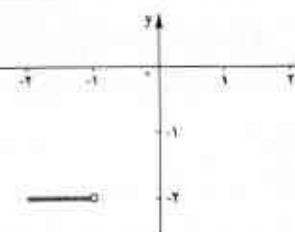


$$2 \leq x < 3 \Rightarrow g(x) = 2$$

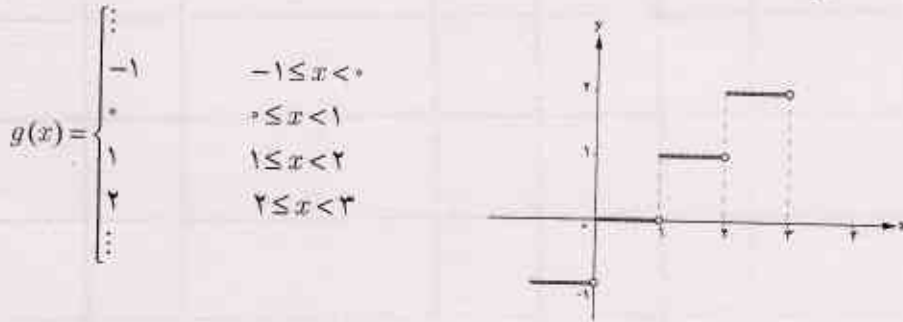
(شکل ۳)

کار در کلاس

به کمک تابع g که در فعالیت صفحه قبل تعریف شده است، جدول زیر را کامل کنید.

حدود x	جواب تابع g	نمودار تابع
 $2 \leq x < 3$	$g(x) = 2$	
 $1 \leq x < 2$	$g(x) = 1$	
 $0 \leq x < 1$	$g(x) = 0$	
 $-1 \leq x < 0$	$g(x) = -1$	
 $-2 \leq x < -1$	$g(x) = -2$	

این حالت‌ها را می‌توانیم با یک تابع چندضابطه‌ای و نمودار متناظرش به صورت زیر بیان کنیم:

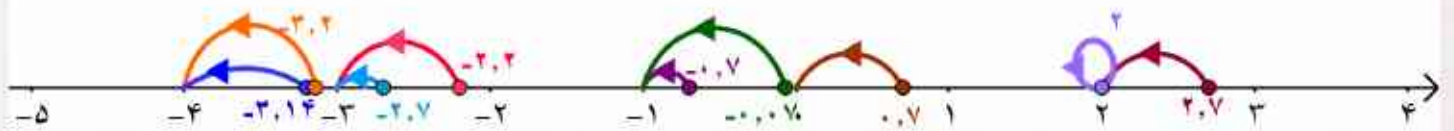


تابعی را که به هر عدد صحیح k خود همان عدد w به تمام اعداد میان دو عدد صحیح متوالی k و $k+1$ ، عدد صحیح k را نسبت می‌دهد، تابع جزء صحیح می‌نامند. ضابطه این تابع را با $g(x) = [x]$ (بخوانید جزء صحیح x) معرفی می‌کنند.

کار در کلاس

به کمک تعریف تابع جزء صحیح و با استفاده از محور اعداد، حاصل عبارت‌های خواسته‌شده را به دست آورید.

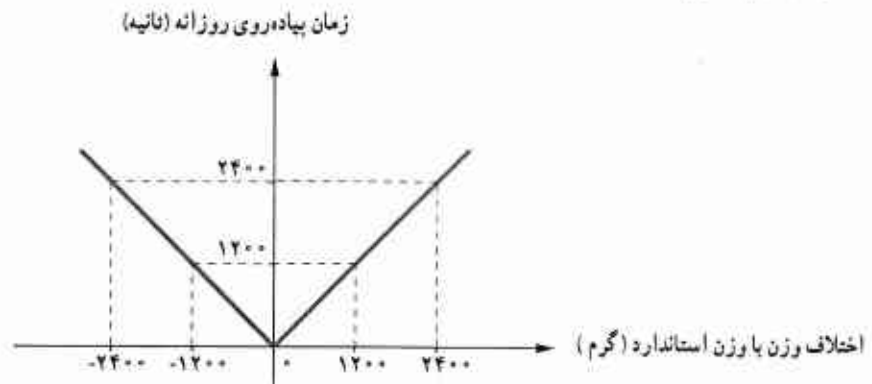
$$\begin{array}{lll} [2] = 2 & [2.7] = 2 & [-2.7] = -3 \\ [0.7] = 0 & [-0.7] = -1 & [-0.7] = -1 \\ [-3.2] = -4 & [-\pi] = -4 & [-2.2] = -3 \end{array}$$



تابع قدر مطلق (Absolute Value Function)

فعالیت

فعالیت ۱. هر چند امروزه بخش عمده‌ای از افراد از اضافه وزن رنج می‌برند، بخش دیگری نیز دچار کمبود وزن نسبت به وزن استاندارد هستند. هر دو گروه باید تلاش کنند که وزن خود را استاندارد کنند. یک روش برای این کار، پیاده‌روی منظم روزانه است. فرض کنیم یک گروه خاص از افراد در یک روز، به ازای هر یک گرم افزایش یا کاهش وزن باید یک ثانیه پیاده‌روی کند. بر این اساس فردی با 1200 گرم اضافه وزن یا 1200 گرم کمبود وزن باید 1200 ثانیه، یعنی 20 دقیقه روزانه به صورت منظم پیاده‌روی کند و فردی با 2400 گرم اضافه وزن یا 2400 گرم کمبود وزن باید روزانه 2400 ثانیه یعنی 40 دقیقه به صورت منظم پیاده‌روی کند. این مفهوم را می‌توان به کمک نمودار زیر نشان داد:



اگر مقدار اضافه وزن را با علامت مثبت و مقدار کمبود وزن را با علامت منفی نشان دهیم و f بیانگر تابعی باشد که میزان پیاده‌روی بر حسب ثانیه را نشان می‌دهد، اطلاعات پیش گفته را به صورت زیر می‌توانیم بیان کنیم:

$$f(1200) = 1200 \quad f(-1200) = 1200 \quad f(2400) = 2400 \quad f(-2400) = 2400$$

که این مفهوم را در یک تابع دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

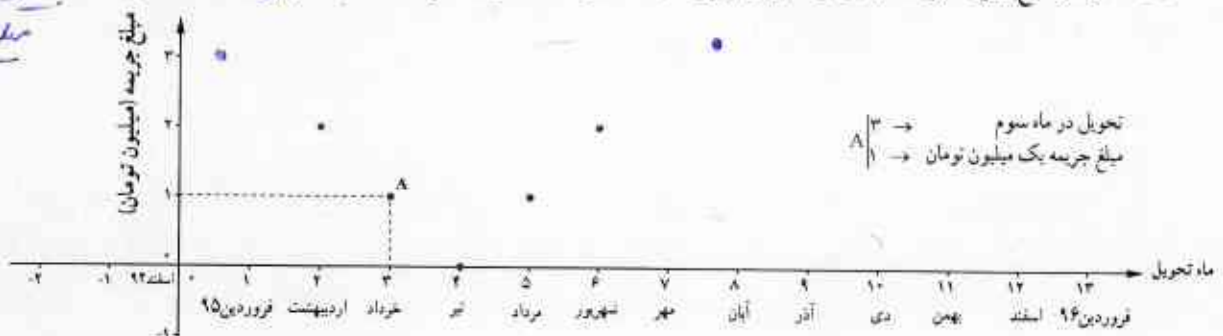
$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

این تابع را می‌توان چنین تعبیر کرد که هر مقدار در دامنه را، به قدر مطلق همان مقدار در برد نظیر می‌کند.

تابع با ضابطه $f(x) = |x|$ ، تابع قدر مطلق نامیده می‌شود و مطابق تعریف:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

فعالیت ۲. پلی که روی رودخانه سیمینه رود در استان آذربایجان غربی ساخته شده، طبق قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه باید در تیر ۱۳۹۵ افتتاح شود. اگر احداث این پل زودتر از موعد مقرر انجام شود، به دلیل هزینه نگهداری پل و عدم استفاده از آن (به خاطر پایان نیافتن بقیه جاده مواصلاتی به پل) به ضرر است. همچنین تأخیر در زمان افتتاح پل نیز موجب خسارت به صاحب کار (وزارت راه) است. بر این اساس مطابق قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه به ازای هر یک ماه اختلاف با زمان تحویل، پیمانکار متعهد است یک میلیون تومان جریمه پرداخت کند. تحویل پروژه به روز بستگی ندارد؛ بلکه به ماه تحویل بستگی دارد. الف. نمودار تابع جریمه بر حسب زمان تحویل پروژه در ماه‌های مختلف را کامل کنید. به ازای هر ماه تأخیر یا تحویل در پروژه یک میلیون تومان جریمه



ب. آیا می‌توانید این نمودار را به زبان یک تابع قدر مطلق بیان کنید؟
 ج. اگر پیمانکار چهار میلیون تومان جریمه پرداخت کرده باشد، تحویل پروژه در چه ماه یا ماه‌هایی می‌تواند انجام شده باشد؟
 چرا؟ پاسخ این پرسش را به کمک نمودار بالا و ضابطه تابع قدر مطلق به دست آمده توضیح دهید.

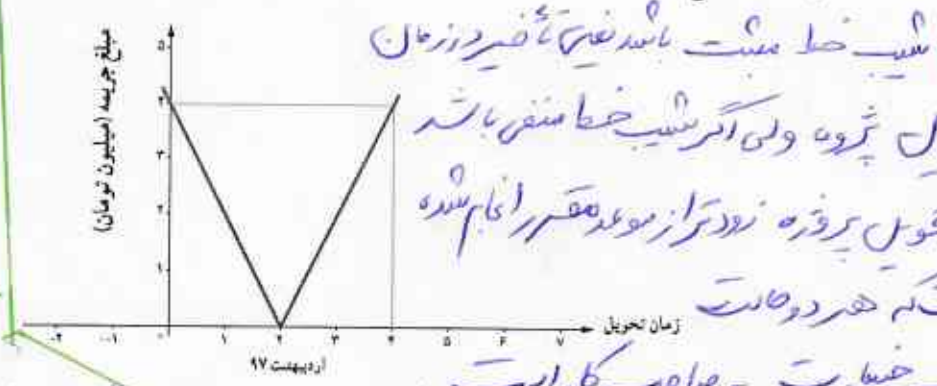
چون ۴ ماهه با زمان تحویل پروژه اختلاف دارد. $f(8) = |8-4| = 4$ یعنی ۴ میلیون تومان جریمه
 ۴ ماهه اسفند ۹۶
 ۴ ماهه اردیبهشت ۹۵

کار در کلاس

با توجه به نمودار الف. شرایط تحویل ندادن به موقع پروژه میان پیمانکار و وزارت راه را بیان کنید. اگر پروژه ارجاه ۲ (در ۲ تحویل دهنده جریمه نمی‌شود) از آن ب. به کمک نقاط مندرج در نمودار، ضابطه هر یک از نیم خط‌ها با شیب مثبت و منفی را به دست آورید. ج. به کمک تعریف تابع قدر مطلق، دو ضابطه را با یک ضابطه بیان کنید. د. شیب خط در تابع به دست آمده در قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه چه معنایی دارد؟

شیب خط مثبت باشد ضربه تأخیر در زمان تحویل پروژه ولی اگر شیب خط منفی باشد یعنی تحویل پروژه زودتر از موعد مقرر انجام شده است که هر دو حالت موجب خسارت به صاحب کار است.

$(2, 0)$ $m = \frac{0-4}{2-0} = -2$
 $(4, 4)$ $m = \frac{4-0}{4-2} = 2$
 $\Rightarrow y = -2x + 4 \quad x < 2$
 شیب منفی (ب)



$f(x) = \begin{cases} 2x-4 & x \geq 2 \\ -2x+4 & x < 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = |2x-4|$

شیب مثبت (ج)

حل یک مسئله

نمودار تابع $y = |2x - 6|$ را رسم کنید.

با توجه به تعریف قدر مطلق

$$|u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases}$$

$$y = |2x - 6| = \begin{cases} 2x - 6 & 2x - 6 \geq 0 & (1) \\ -(2x - 6) & 2x - 6 < 0 & (2) \end{cases}$$

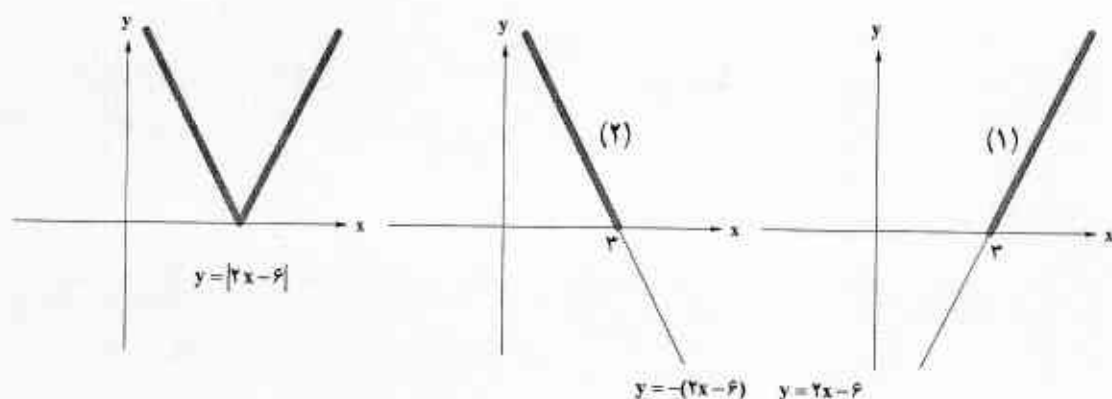
برای تعیین حدود x برای هر کدام از ضابطه‌های بالا، به کمک قوانین نامساوی‌ها در ریاضی نهم:

$$\begin{cases} 2x - 6 \geq 0, & 2x \geq 6 \Rightarrow x \geq 3 & (1) \\ 2x - 6 < 0, & 2x < 6 \Rightarrow x < 3 & (2) \end{cases}$$

پس ضابطه تابع این گونه مشخص می‌شود:

$$y = |2x - 6| = \begin{cases} 2x - 6 & x \geq 3 & (1) \\ -(2x - 6) & x < 3 & (2) \end{cases}$$

و نمودار تابع به صورت زیر رسم می‌شود:



کار در کلاس

الف. نمودار $y = |x - 4|$ را رسم کنید.

ب. نمودار $y = |x|$ را در همین صفحه مختصات رسم کنید.

ج. آیا می‌توان بدون مراحل حل بالا، بر اساس نمودار $y = |x|$ ، نمودار $y = |x - 4|$ را رسم کرد؟ چگونه؟

د. نمودار $y = |x - 3|$ و $y = |x + 1|$ را با توجه به «ج» رسم کنید.

ه. نمودار $y = |x| + 1$ را چگونه می‌توان بر اساس نمودار $y = |x|$ رسم نمود؟

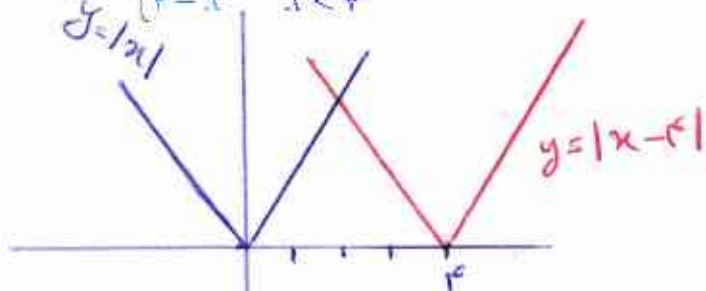
حل کابردی طلاس ۴۲

$$y = |x-4| = \begin{cases} x-4 & x-4 \geq 0 \\ -(x-4) & -(x-4) < 0 \end{cases}$$

$$y = |x-4|$$

$$x-4=0 \Rightarrow x=4$$

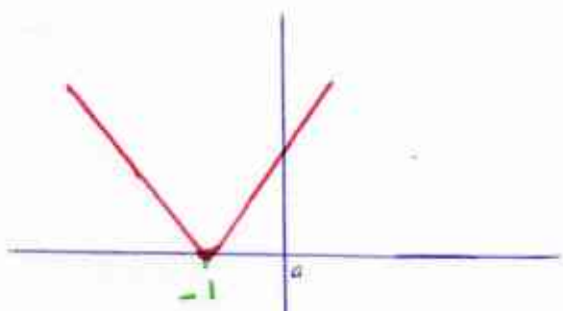
$$\Rightarrow y = \begin{cases} x-4 & x-4 \geq 0 \\ 4-x & x < 4 \end{cases}$$



ج) طبق نمودار رسم شده مشخص شد که از روش انتقال به سوال، برای رسم تابع $y = |x-4|$ کافی است

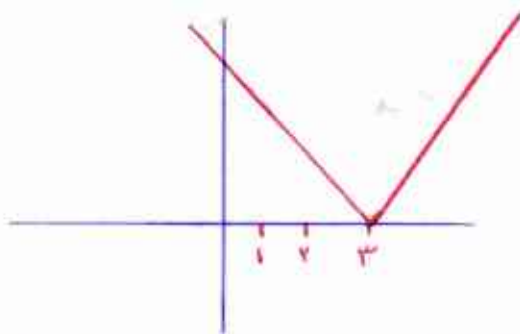
ابتدا نمودار تابع $y = |x|$ را رسم کرد پس به اندازه ۴ واحد به سمت راست انتقال داد.

$$y = |x+1| \quad x+1=0 \Rightarrow x=-1$$



نمودار تابع $y = |x+1|$ را به اندازه ۱ واحد به سمت چپ انتقال دادیم.

$$y = |x-3| \quad x-3=0 \Rightarrow x=3$$

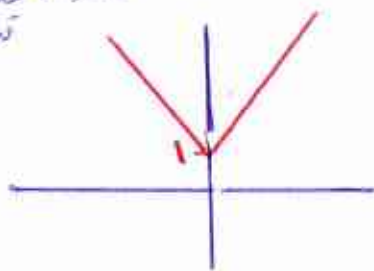


نمودار تابع $y = |x-3|$ را به اندازه ۳ واحد به سمت راست انتقال دادیم.

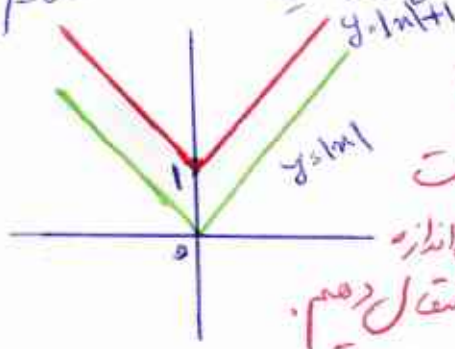
$$y = |x| + 1$$

$$y=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=1$$

میدان درون
در وسط
(ا و ۰) فقط راس
در وسط



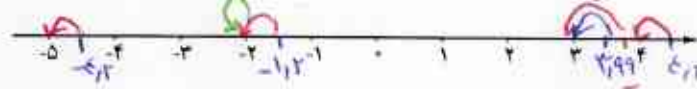
د) در نمودار تابع $y = |x| + 1$ را رسم کردیم (رسمه فقط مشخص کنیم)



نتیجه حاصل شد که برای رسم تابع $y = |x| + 1$ کافی است نمودار تابع $y = |x|$ را به اندازه ۱ واحد به سمت بالا انتقال دهیم.

تمرین

۱. به کمک تعریف تابع جزء صحیح و با استفاده از محور زیر حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.



$$\begin{aligned} [4/2] &= 4 & [-4/2] &= -5 & [3/99] &= 3 \\ [-1/2] &= -2 & [-2] &= -2 & [\pi] &= 3 \end{aligned}$$

۲. با توجه به تعریف تابع جزء صحیح، جدول زیر را کامل کنید.

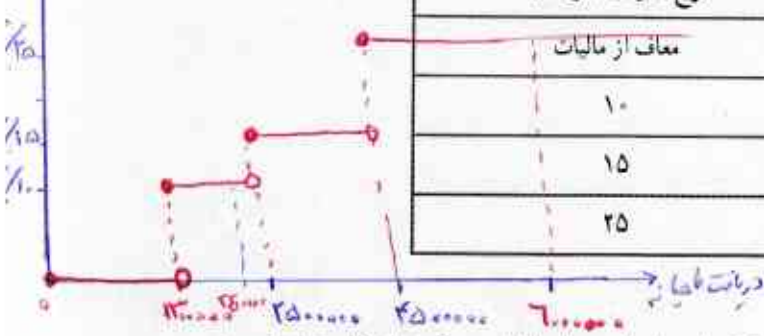
خاصیت تابع	مقدار x	مقدار $f(x)$
$f(x) = [x]$	$x = -2/3$	$f(x) = -3$
	$x = 5$	$f(x) = 5$
$f(x) = [-x]$	$x = 1/7$	$f(x) = -2$
	$x = 2/3$	$f(x) = -2$
$f(x) = [x] + [-x]$	$x = 1$	$f(x) = 0$
	$x = 1/3$	$f(x) = -1$
	$x = 1/7$	$f(x) = -1$
	$x = 2$	$f(x) = 0$
$f(x) = [3x]$	$x = 1$	$f(x) = 3$
	$x = 0/2$	$f(x) = 0$
	$x = 1/3$	$f(x) = 3$

$$[x] + [-x] = \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= [1] + [-1] = 1 + (-1) = 0 \\ f(1/3) &= [1/3] + [-1/3] = 0 + (-1) = -1 \\ f(1/7) &= [1/7] + [-1/7] = 0 + (-1) = -1 \\ f(2) &= [2] + [-2] = 2 + (-2) = 0 \\ f(1) &= [3(1)] = [3] = 3 \\ f(0/2) &= [3(0/2)] = [0] = 0 \\ f(1/3) &= [3(1/3)] = [1] = 1 \end{aligned}$$

۳. جدول مالیاتی زیر را که توسط هیئت مدیره یک شرکت برای سال جدید مالی آماده و تصویب شده است، در نظر بگیرید:

نرخ مالیات (درصد)	حقوق ماهیانه (تومان)
معاف از مالیات	حقوق تا ۱/۳۰۰/۰۰۰
۱۰	مزداد بر ۱/۳۰۰/۰۰۰ تا ۲/۵۰۰/۰۰۰
۱۵	مزداد بر ۲/۵۰۰/۰۰۰ تا ۴/۵۰۰/۰۰۰
۲۵	مزداد بر ۴/۵۰۰/۰۰۰



الف. نمودار پلکانی متناظر با جدول مالیاتی را رسم کنید.

ب. به کمک نمودار پلکانی و محاسبه سطح متناظر با هر یک از حقوق‌های ماهیانه، مبلغ مالیات هر کدام از کارمندان زیر را

محاسبه کنید.

- کارمندی با حقوق ۱/۲۰۰/۰۰۰ تومان
- کارمندی با حقوق ۲/۴۰۰/۰۰۰ تومان
- کارمندی با حقوق ۶/۰۰۰/۰۰۰ تومان

کارمندی با درآمدهای ۱۳۰۰۰۰ ← معاف از مالیات

$$\left(240000 \times \frac{10}{100} \right) = 240000 - 240000 = 216000$$

$$\left(60000 \times \frac{25}{100} \right) = 60000 - 150000 = 450000$$

$$f(130000) = 130000 - 130000 = 0$$

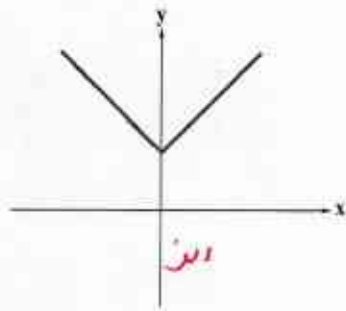
$$f(240000) = 240000 - \left(240000 \times \frac{10}{100} \right) = 240000 - 240000 = 216000$$

$$f(600000) = 600000 - \left(600000 \times \frac{25}{100} \right) = 600000 - 150000 = 450000$$

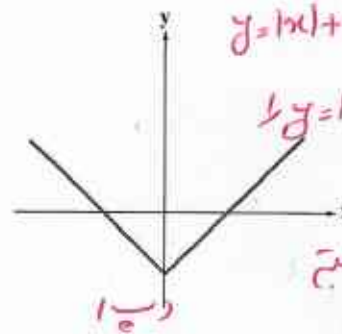
دریافتی

۴. با توجه به نمودارهای زیر، کدام نمودار، تابع الف و کدام نمودار، تابع ب را مشخص می کند؟ چه نتیجه ای می گیرید؟

الف) $y = |x| + 2$
ب) $y = |x| - 3$



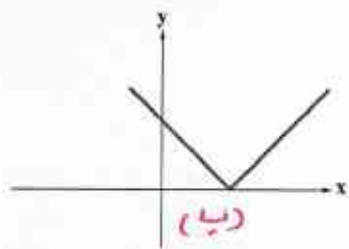
ب) (الف)



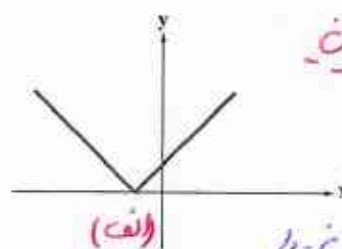
ب) (ب)

توجه کنید برای رسم $y = |x| + k$ کافی است نمودار $y = |x|$ به اندازه k واحد در جهت بالا یا پایین جابجایی کنیم. شیب k دارد. $k > 0$ انتقال به سمت بالا، $k < 0$ انتقال به سمت پایین.

الف) $y = |x + 1|$
ب) $y = |x - 4|$



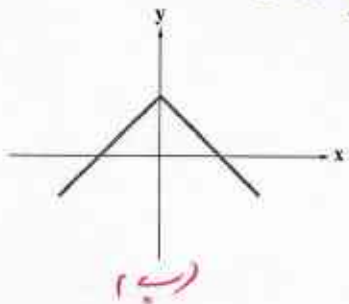
ب) (ب)



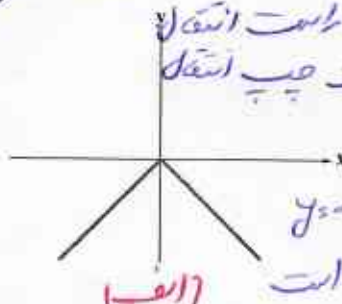
ب) (الف)

توجه کنید برای رسم تابع $f(x) = |x + k|$ کافی است نمودار $y = |x|$ را به اندازه k واحد در راست یا چپ جابجایی کنیم.

الف) $y = -|x|$
ب) $y = -|x| + 1$



ب) (ب)



ب) (الف)

توجه کنید برای رسم نمودار $y = -|x| + k$ کافی است نمودار $y = -|x|$ را به اندازه k واحد در جهت بالا یا پایین جابجایی کنیم.

الف) $y = |2x - 3|$

ب) $y = |2x + 1|$

۵. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

نمودار $y = |x|$ ترسیم کنید

شیب به اندازه k در محور

۶. با توجه به نمودار

نمودارهای

الف. شرایط تحویل ندادن به موقع پروژه میان پیمانکار و وزارت راه

را بیان کنید. اگر شیب در دست آورد.

ب. به کمک نقاط مندرج در نمودار، ضابطه هر یک از نیم خطها با

شیب مثبت و منفی را به دست آورید.

ج. به کمک تعریف تابع قدر مطلق، دو ضابطه را با یک ضابطه بیان کنید.

د. شیب خط در تابع به دست آمده در قرارداد میان پیمانکار و وزارت

راه چه معنایی دارد؟ افزایش یا کاهش شیب خط به چه معناست؟

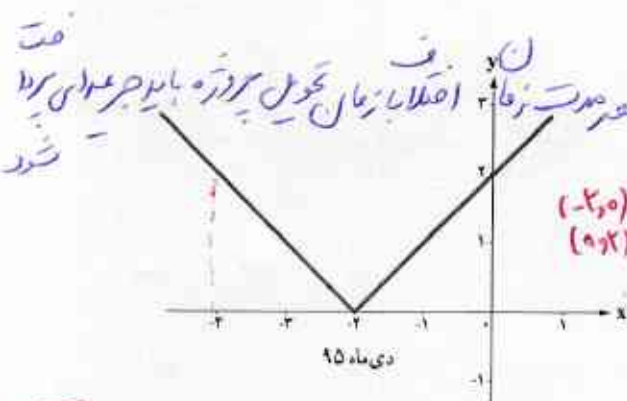
۷. شیب خط مثبت و شیب خط منفی در زمان تحول پروژه شیب خط

مثبت باشد یعنی تحول زودتر از موعد مقرر انجام شده است که هر دو

حالت موجب خرابی است.

۸. اندازه مقدار شیب نشان دهنده افزایش مبلغ و عمده

و کاهش مقدار شیب نشان دهنده کاهش مبلغ و عمده است.



$(-2, 0) \Rightarrow m = 1$
 $(0, 2) \Rightarrow m = 2$
 $y = x + 2 \quad x > -2$
 $y = -x - 2 \quad x < -2$

$(-2, 0) \Rightarrow m = -1$

$(0, 2) \Rightarrow m = 2$

$y = -x - 2 \quad x < -2$

$y = x + 2 \quad x > -2$

۹. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & x > -2 \\ -x - 2 & x < -2 \end{cases}$

۱۰. پاسخ

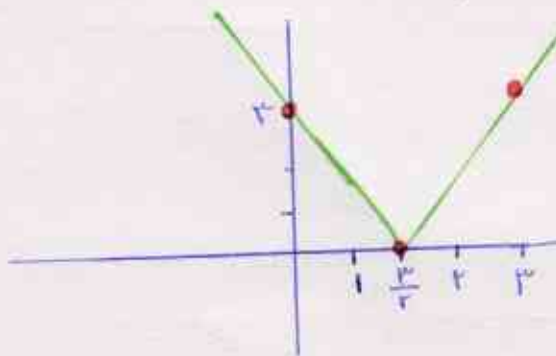
تقریب ۴۴ کتاب - آمار ریاضی انسانی سوال ۵

پاسخ تقریب ۵ :

الف) $y = |r_n - r|$

$r_n - r = 0 \Rightarrow r_n = \frac{r}{r}$

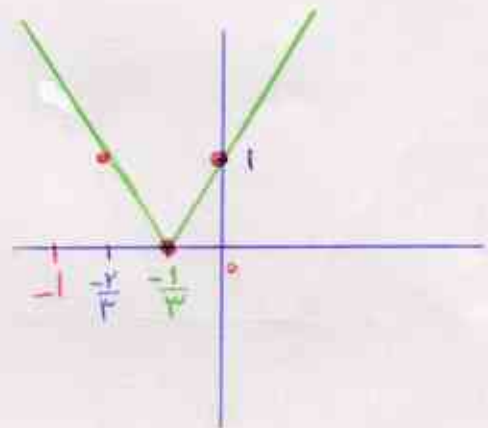
$$f(x) = \begin{cases} r_n - r & x \geq \frac{r}{r} \\ -(r_n - r) & x < \frac{r}{r} \end{cases}$$



ب) $y = |r_{n+1}|$

$r_{n+1} = 0 \Rightarrow r_n = \frac{-1}{r}$

$$y = \begin{cases} r_{n+1} & r_n \geq \frac{-1}{r} \\ -(r_{n+1}) & r_n < \frac{-1}{r} \end{cases}$$



درس ۳

اعمال بر روی توابع

فعالیت

علیرضا، دانشجوی رشته اقتصاد است و با پدر و مادر و خواهرش مریم (دوازده ساله) زندگی می کند. وی می خواهد در جشنواره فیلم و تئاتر دهه فجر امسال اعضای خانواده اش را به تماشای یک فیلم یا تئاتر دعوت کند. با توجه به تفاوت علاقه مندی اعضای خانواده به سبک های مختلف فیلم و تئاتر و تنوع موارد نمایش داده شده در سینما و تئاتر، برخلاف تصور اولیه اش، نتوانست به سادگی تصمیم بگیرد که چه فیلمی را می تواند با اعضای خانواده اش ببیند. بنابراین:

۱. ابتدا با یک پرسش نامه سبک دلخواه هر یک از اعضای خانواده را مشخص کرد؛ زیرا بدیهی است که او تمایل دارد با هر کدام از اعضای خانواده اش به دیدن فیلم یا تئاتری برود که سلیقه سینمایی آنها و خودش را تأمین کند.
۲. با توجه به بودجه محدودی که برای این اقدام در نظر گرفته است، تمایل دارد که بدانند هزینه صرف شده در این هفته چقدر خواهد بود. جدول زیر هزینه بلیت سینما و تئاتر را برای گروه های مختلف مشخص کرده است. مسئولان جشنواره در بخش هایی برای کودک و نوجوان و نیز دانشجویان تخفیف هایی قائل شده اند. لطفاً جدول را کامل کنید.

جدول ۱. هزینه بلیت با توجه به گروه های مختلف

گروه سنی	مکان نمایش	سینما	تئاتر	سینمای کودک و نوجوان
فرد عادی		۱۰۰۰۰	۳۰۰۰۰	۴۰۰۰
دانشجو		۸۰۰۰ = ۲۰٪ تخفیف	۲۴۰۰۰ = ۲۰٪ تخفیف	۴۰۰۰
کودک و نوجوان		۱۰۰۰	۱۵۰۰۰ = ۵۰٪ تخفیف	۲۰۰۰ = ۵۰٪ تخفیف



علیرضا نتایج پرسش نامه داده شده به اعضای خانواده را در جدول های زیر مشخص نمود :

جدول ۲. علاقه مندی به سینمای کودک و نوجوان

اعضای خانواده	سبک فیلم	کمدی	تاریخی	انیمیشن	علمی - تخیلی
مریم		✓		✓	✓
علیرضا			✓	✓	✓

جدول ۳. علاقه مندی به سینما

اعضای خانواده	سبک فیلم	کمدی	دفاع مقدس	تاریخی	اجتماعی	حادثه ای	علمی - تخیلی
پدر		✓			✓		✓
پدر			✓	✓	✓		
مریم							
علیرضا			✓		✓		✓

جدول ۴. علاقه مندی به تئاتر

اعضای خانواده	سبک تئاتر	کمدی	دفاع مقدس	تاریخی	اجتماعی
پدر		✓	✓	✓	
پدر			✓	✓	✓
مریم		✓		✓	
علیرضا				✓	

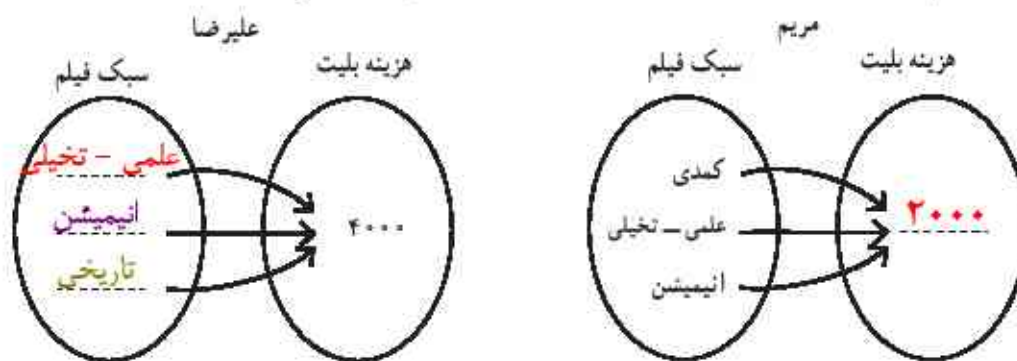
در نخستین روز هفته (شنبه)، علیرضا می خواهد خواهرش را به تماشای یک فیلم در سینمای کودک و نوجوان ببرد.

او باید دو نکته را مشخص کند :

۱. به دیدن چه سبک فیلمی می روند؟

۲. هزینه بلیت آنها چقدر است؟

طبیعی است که علیرضا و خواهرش به دیدن سبک فیلمی خواهند رفت که هر دو به آن علاقه مند باشند؛ به بیان دیگر این سبک فیلم در اشتراک علاقه، دو نفرشان باشد. با توجه به جدول های ۱ و ۲ اگر این دو نفر را تابعی در نظر بگیریم که «دامنه» آن سبک فیلم مورد علاقه هر کدام باشند و «برد» آن هزینه خرید بلیت، نمایش های بیکانی این دو تابع به صورت زیر است :

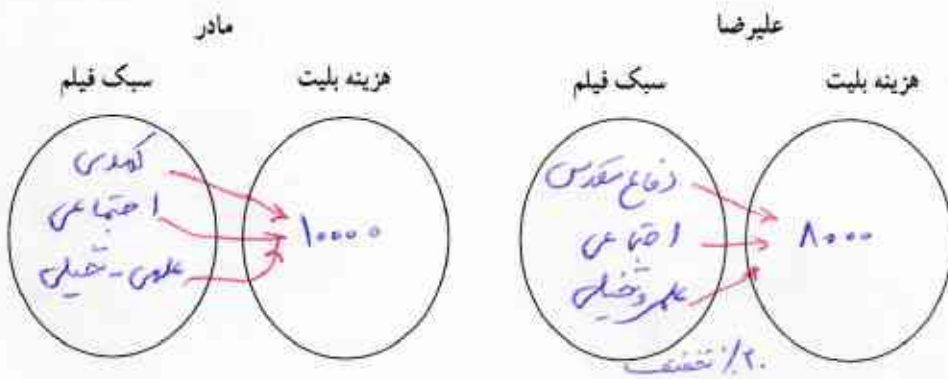


پس اشتراک فیلم مورد علاقه شان دو سبک فیلم **انیمیشن و علمی-تخیلی** است و برای تماشای یکی از این دو سبک یا هر دو نوع آنها می‌توانند به سینما بروند. این مطلب را می‌توانیم چنین نشان دهیم:

$$\begin{aligned} \text{علیرضا} &= \{ (4000, \text{علمی-تخیلی}), (4000, \text{انیمیشن}), (4000, \text{تاریخی}) \} \\ \text{مریم} &= \{ (2000, \text{علمی-تخیلی}), (2000, \text{انیمیشن}), (2000, \text{کمدی}) \} \\ \text{علیرضا + مریم} &= \{ (4000+2000, \text{علمی-تخیلی}), (4000+2000, \text{انیمیشن}) \} \end{aligned}$$

کار در کلاس

۱. اگر در روز دوشنبه علیرضا بخواد مادرش را به تماشای یک فیلم در سینما دعوت کند، با توجه به جدول ۱ و جدول ۲: الف. نمایش‌های پیکانی مشابه فعالیت صفحه قبل را برای هر کدام رسم کنید.



ب. با توجه به اشتراک سبک فیلم مورد علاقه هر کدام، نمایش زوج مرتبی تابعی را بنویسید که علیرضا و مادرش می‌توانند به تماشای فیلمی در سینما بنشینند.

ج. هزینه‌ای که در این روز علیرضا صرف می‌کند، چقدر است؟ **۱۸۰۰۰ تومان**

۲. پنج‌شنبه علیرضا می‌خواهد همه اعضای خانواده‌اش را به تماشای یک تئاتر ببرد. با استفاده از جدول ۱ و جدول ۴، الف. نمایش زوج مرتبی هر کدام از اعضای خانواده و سپس نمایش زوج مرتبی شرایطی را که همه آنها به تماشای یک تئاتر می‌روند، مشخص کنید.

ب. علیرضا در این روز چه میزان هزینه می‌کند؟

$$\text{۱۸۰۰۰ (تومان)} = \{ (24000, \text{تاریخی}), (15000, \text{انیمیشن}), (30000, \text{تاریخی}) \} = \text{علیرضا + مادر + مریم + پدر}$$

$$30000 + 30000 + 15000 + 24000 = 99000$$

۱۸۰۰۰

$$\begin{aligned} & \{ (30000, \text{تاریخی}), (20000, \text{فانسی}), (30000, \text{فانسی}), (30000, \text{کمدی}), (30000, \text{فانسی}), (30000, \text{فانسی}), (30000, \text{فانسی}), (30000, \text{فانسی}), (30000, \text{فانسی}), (30000, \text{فانسی}) \} \\ & \text{علیرضا} = \{ (4000, \text{علمی-تخیلی}), (4000, \text{انیمیشن}), (4000, \text{تاریخی}) \} \\ & \text{مریم} = \{ (2000, \text{علمی-تخیلی}), (2000, \text{انیمیشن}), (2000, \text{کمدی}) \} \\ & \text{علیرضا + مریم} = \{ (4000+2000, \text{علمی-تخیلی}), (4000+2000, \text{انیمیشن}), (4000+2000, \text{تاریخی}) \} \\ & \text{علیرضا} \times \frac{20}{100} = 8000 \quad 30000 - 4000 = 24000 \end{aligned}$$

با توجه به فعالیت مطرح شده پرسش مهم زیر را پاسخ می‌دهیم:

با چه شرایطی می‌توان دو تابع f و g را با یکدیگر جمع کرد؟

برای دو تابع f و g که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند، $f+g$ تابعی است که روی $D_f \cap D_g$ تعریف شده است و برای

هر مقدار x در این اشتراک داریم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

برای مثال اگر:

$$f = \{(1, 2) \text{ و } (-3, 4) \text{ و } (3, 5) \text{ و } (7, -1)\}$$

و

$$g = \{(2, 1) \text{ و } (3, -1) \text{ و } (7, 2)\}$$

فرض شود با توجه به دامنه‌های دو تابع f و g :

$$D_f = \{1, -3, 3, 7\}$$

$$D_g = \{2, 3, 7\}$$

اشتراک دو دامنه برابر است با:

$$D_f \cap D_g = \{3, 7\}$$

پس تابع $f+g$ این‌گونه مشخص می‌شود:

$$f+g = \{(3, -1+5) \text{ و } (7, 2+(-1))\} = \{(3, 4) \text{ و } (7, 1)\}$$

فعالیت

با توجه به ضابطه‌های $f_1(x) = x^2 - 1$ و $f_2(x) = x + 1$ ، ضابطه توابع زیر را به دست آورید:

$$\begin{aligned}
 f_3(x) &= f_1(x) + f_2(x) = (x^2 - 1) + (x + 1) = x^2 + x & f_4(x) &= x^2 + x \\
 f_5(x) &= f_1(x) - f_2(x) = x^2 - 1 - (x + 1) = x^2 - x - 2 & f_6(x) &= x^2 - x - 2 \\
 f_7(x) &= f_2(x) - f_1(x) = (x + 1) - (x^2 - 1) = -x^2 + x + 2 & f_8(x) &= -x^2 + x + 2 \\
 f_9(x) &= f_1(x) \times f_2(x) = (x^2 - 1)(x + 1) = x^3 + x^2 - x - 1 & f_{10}(x) &= x^3 + x^2 - x - 1 \\
 f_{11}(x) &= \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x - 1 & f_{12}(x) &= x - 1 \\
 f_{13}(x) &= \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \frac{x + 1}{x^2 - 1} = \frac{x + 1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} & f_{14}(x) &= \frac{1}{x-1}
 \end{aligned}$$

اگر مقادیر تابع‌های f_1 تا f_{14} را به ازای $x=2$ نمادهای وزنه‌های کفه‌های ترازو بمانند، چرا دو کفه ترازو با هم برابرند؟ از این پاسخ

چه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟ نتیجه شایسته f_1 با f_2 یا $f_1 \times f_2$ با هم برابرند. در کنار این سوال در کتاب درسی خود

$f_9(2) = 2^3 + 2^2 - 2 - 1 = 9$

کیفیت سبک را با هم برابرند. $f_1 \times f_2$ با هم برابرند. f_1 با f_2 با هم برابرند.

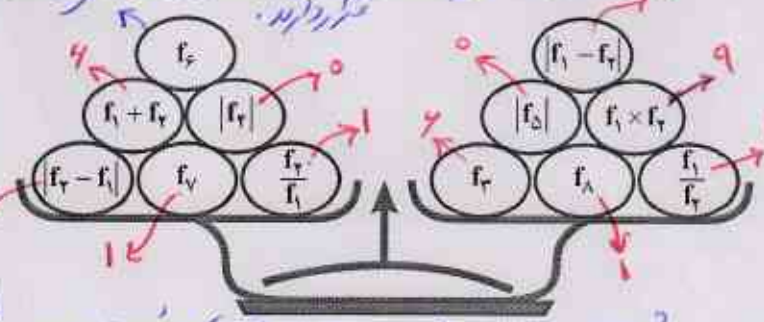
$|f_1 - f_2| = |2^2 - 2 - 1| = 0$

$|f_9| = |2^3 + 2^2 - 2 - 1| = 9$

$f_1(2) \times f_2(2) = 2^2 - 1 \times 2 + 1 = 9$

$f_2(2) = 2 + 1 = 3$

$f_{11}(2) = \frac{1}{2-1} = 1$



دو کفه با هم برابرند \Rightarrow $\left. \begin{aligned} \text{کفه سبک چپ} &= 9 + 4 + 0 + 1 + 0 + 1 = 17 \\ \text{کفه سبک راست} &= 0 + 9 + 1 + 1 + 0 + 4 = 17 \end{aligned} \right\}$

$f_1(2) + f_2(2) = 4$

$|f_5(2)| = 0$

$|f_7(2) - f_1(2)| = 0$

$f_{11}(2) = 2 - 1 = 1$

$\frac{f_2(2)}{f_1(2)} = \frac{2+1}{2^2-1} = \frac{3}{3} = 1$

عمل‌های جمع، تفریق، ضرب و تقسیم روی دو تابع به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 (f - g)(x) &= f(x) - g(x) & D_{f-g} &= D_f \cap D_g \\
 (f \times g)(x) &= f(x) \times g(x) & D_{f \times g} &= D_f \cap D_g \\
 \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} & D_{\frac{f}{g}} &= D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}
 \end{aligned}$$

$f_1(x) = (x)^x - 1 = 4 - 1 = 3$	$f_7(x) = (x) + 1 = 3$
$f_7(x) = (x)^x + (x) = 4 + 2 = 6$	$f_8(x) = (x)^x - (x) - x = 4 - 2 - 2 = 0$
$f_8(x) = -(x)^x + (x) + x = -4 + 2 + 2 = 0$	$f_9(x) = (x)^x + (x)^x - (x) - 1 = 8 + 4 - 2 - 1 = 9$
$f_9(x) = (x) - 1 = 1$	$f_{10}(x) = \frac{1}{(x) - 1} = \frac{1}{1} = 1$

سمت چپ ترازو	سمت راست ترازو
$f_9(x) = 9$	$ f_1(x) - f_7(x) = 3 - 3 = 0 = 0$
$f_1(x) + f_7(x) = 3 + 3 = 6$	$ f_8(x) = 0 = 0$
$ f_7(x) = 0 = 0$	$f_1(x) \times f_7(x) = 3 \times 3 = 9$
$ f_7(x) - f_1(x) = 3 - 3 = 0 = 0$	$f_7(x) = (x)^x + (x) = 4 + 2 = 6$
$f_9(x) = (x) - 1 = 1$	$f_{10}(x) = \frac{1}{(x) - 1} = \frac{1}{1} = 1$
$\frac{f_7(x)}{f_1(x)} = \frac{3}{3} = 1$	$\frac{f_1(x)}{f_7(x)} = \frac{3}{3} = 1$
$9 + 6 + 0 + 0 + 1 + 1 = 17$	$0 + 0 + 9 + 6 + 1 + 1 = 17$

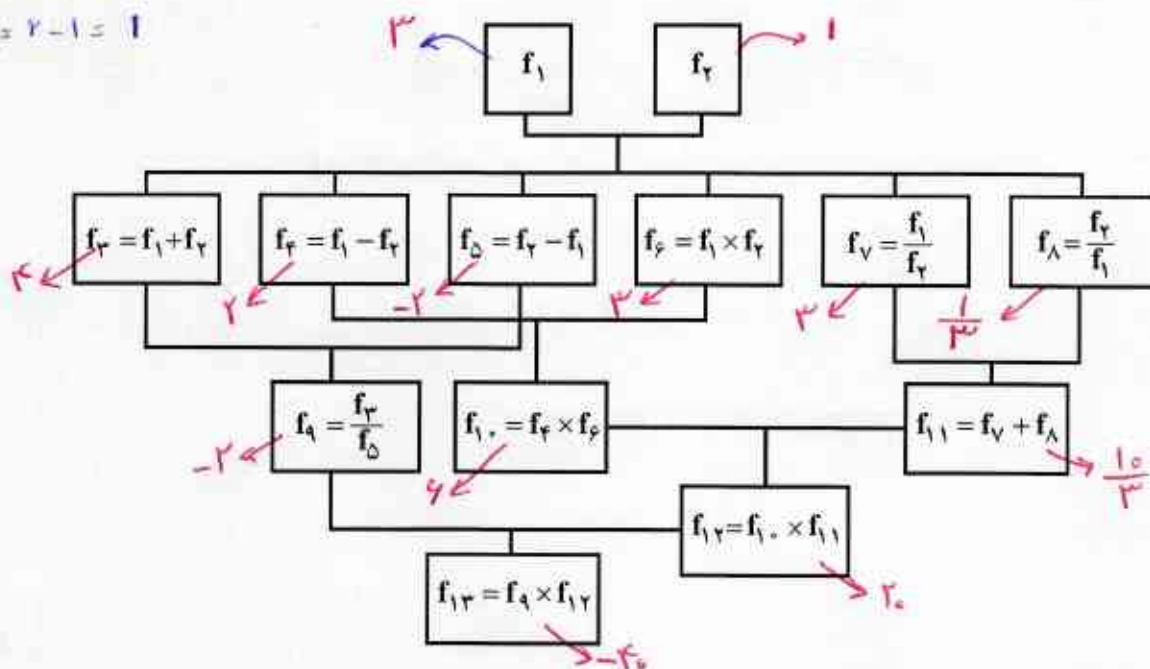
نتیجہ می گیریم:
$f_9(x) = f_1(x) \times f_7(x)$
$f_1(x) + f_7(x) = f_6(x)$
$ f_7(x) = f_8(x) $
$ f_7(x) - f_1(x) = f_1(x) - f_7(x) $
$f_9(x) = \frac{f_1(x)}{f_7(x)}$
$\frac{f_7(x)}{f_1(x)} = f_{10}(x)$

کار در کلاس

۱. با توجه به ضابطه $f_1(x) = x+1$ و $f_2(x) = x-1$ درخت زیر را به ازای $x=2$ کامل کنید.

$$f_1(2) = 2+1 = 3$$

$$f_2(2) = 2-1 = 1$$



۲. اگر $f = \{(2,0), (4,-1), (-1,3)\}$ و $g = \{(2,5), (3,-1), (-1,2)\}$ باشد، توابع زیر را مشخص کنید.

$$f+g = \{(2, 5), (-1, 5)\}$$

$$D_{f+g} = \{2, -1\}$$

$$f \times g = \{(2, 0), (-1, 6)\}$$

$$D_{f \times g} = \{2, -1\}$$

$$\frac{g}{f} = \left\{(-1, \frac{3}{-1})\right\}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = \{-1\}$$

$$\frac{f}{g} = \{(2, 0), (-1, \frac{3}{-1})\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{2, -1\}$$

$$f-g = \{(2, -5), (-1, 1)\}$$

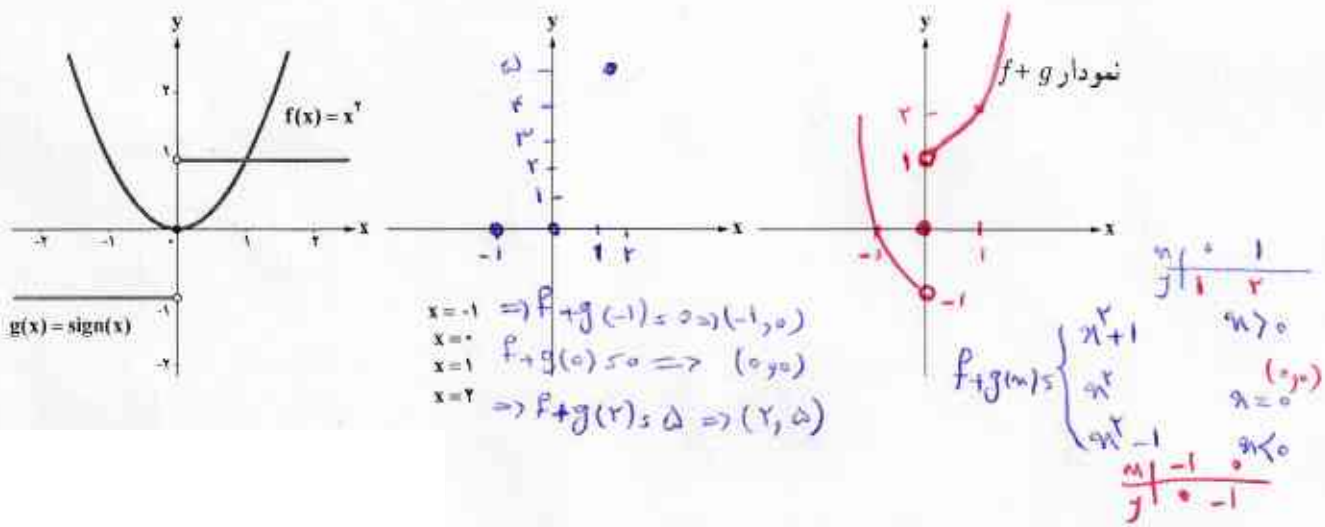
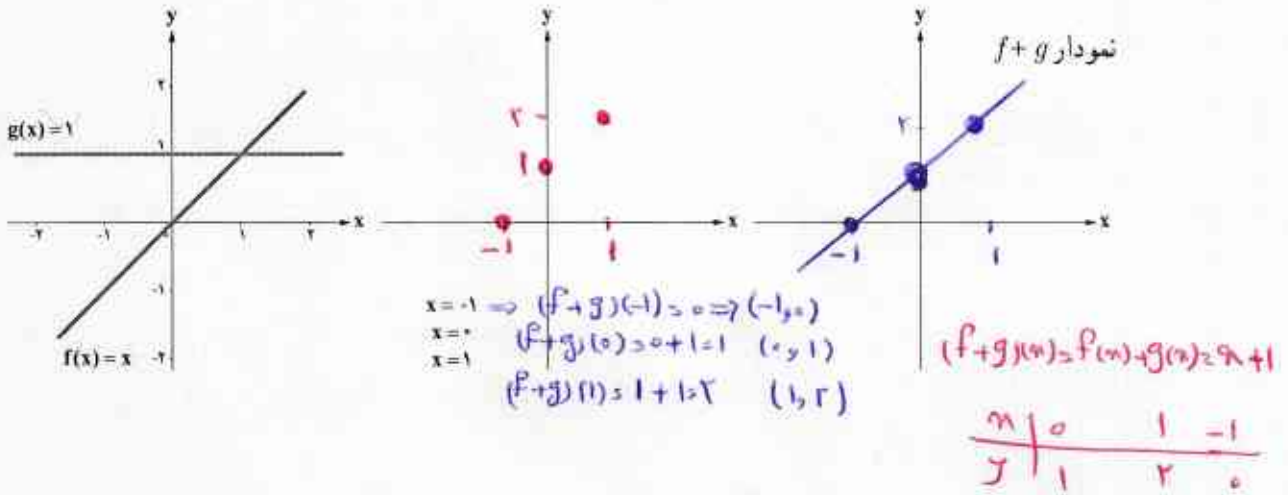
$$D_{f-g} = \{2, -1\}$$

$$g-f = \{(2, 5), (-1, -1)\}$$

$$D_{g-f} = \{2, -1\}$$

فعالیت

به کمک نمودارهای رسم شده توابع f و g ، نمودار تابع $f+g$ را ابتدا فقط در نقاط داده شده مشخص کنید. سپس نمودار کلی تابع $f+g$ را به کمک ضابطه تابع آن و نیز نقاط مشخص شده از تابع، رسم کنید.

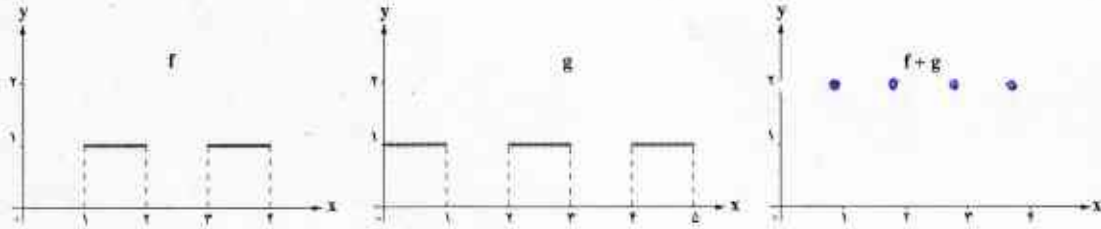


تمرین

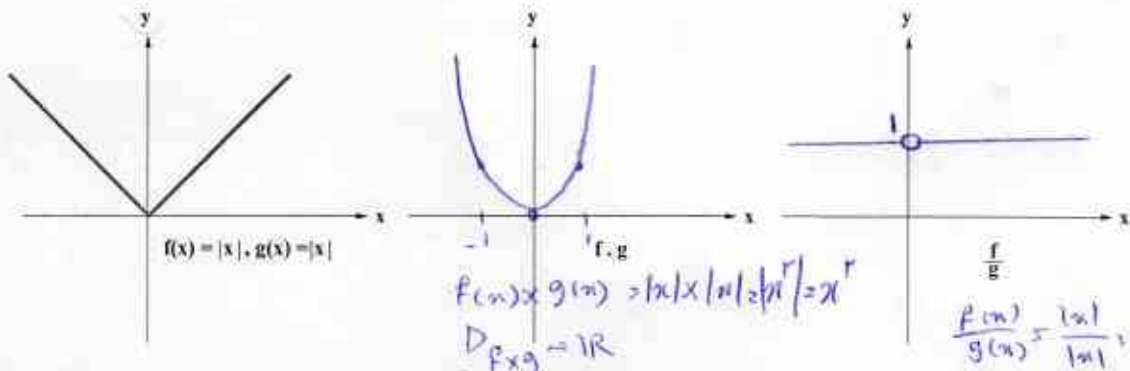
۱. در هر حالت با توجه به نمودار توابع f و g ، نمودار توابع خواسته شده را رسم کنید.

(الف)

$$D_{f \pm g} = \{1, 2, 3, 4\}$$



(ب)



$$D_{f/g} = \mathbb{R} - \{0\}$$

۲. یک شرکت هولدینگ دارای دو کارخانه A و B است. اگر توابع درآمد و هزینه برای تولید x تن کاشی در کارخانه A به ترتیب $2x^2 + 16x - 2$ و $8x + 6$ و در کارخانه B به ترتیب $12x - x^2$ و $2x + 9$ واحد باشد (هر واحد معادل یک میلیون تومان):
الف. تابع سود شرکت هولدینگ را به دست آورید.

پایه سوال ۲ در پایین

ب. این هولدینگ با چه میزان تولید کاشی به سود ماکزیمم خود می‌رسد؟

۳. اگر $f(x) = [x]$ با دامنه $1 \leq x \leq 2$ و $g(x) = |x|$ با دامنه $1 \leq x \leq 2$ و $h(x) = x^2 - 4$ با دامنه $-1 \leq x \leq 1$ در نظر گرفته شود، جدول زیر را کامل کنید.

تابع	ضابطه	نمودار
$s(x) = f(x) + g(x)$	$s(x) = [x] + x \quad (1, 2)$ $D_s = D_f \cap D_g = \{1\}$ $n=1 \rightarrow s(1) = [1] + 1 = 2$	
$q(x) = \frac{h(x)}{f(x)}$	$q(x) = \frac{x^2 - 4}{[x]} \quad (1, -3)$ $D_q = D_h \cap D_f = \{1\}$ $n=1 \rightarrow q = \frac{1-4}{1} = -3$	
$p(x) = h(x) \times g(x)$	$p(x) = (x^2 - 4) \times x \quad (1, -3)$ $D_p = D_h \cap D_g = \{1\}$ $n=1 \rightarrow p(1) = (1-4) \times 1 = -3$	

$$D_f \cap D_h - \{h(x) = 0\} = [0, 1] - [0, 1] = \{1\}$$

۱. هولدینگ از واژه لاتین Hold به معنای نگه داشتن می‌آید. شرکت هولدینگ یا مادر، شرکتی سهامی است که دارای شرکت‌های زیرمجموعه است. کنترل شرکت‌های زیرمجموعه مستقیماً زیر نظر مدیران و هیئت مدیره شرکت اصلی است.

صفت الف

پایه سوال ۲

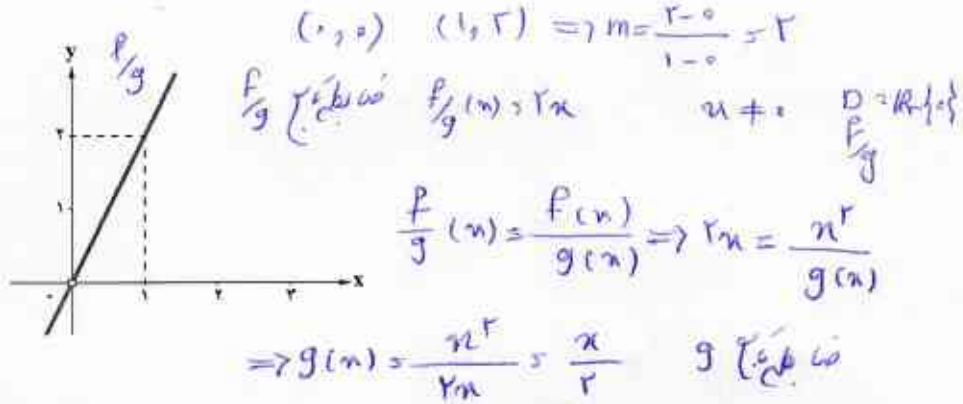
$$P_1(n) = R_1(n) - C_1(n) = -2n^2 + 16n - 2 - (8n + 6) = -2n^2 + 8n - 8$$

$$P_2(n) = R_2(n) - C_2(n) = -n^2 + 12n - (2n + 9) = -n^2 + 10n - 9$$

$$P(n) = P_1(n) + P_2(n) = -2n^2 + 8n - 8 - n^2 + 10n - 9 = -3n^2 + 18n - 17$$

$$n = \frac{-b}{2a} = \frac{-18}{2(-3)} = \frac{-18}{-6} = 3$$

۴. اگر $f(x) = x^r$ و تابع $(\frac{f}{g})(x)$ به صورت نمودار زیر باشد، ضابطه تابع $g(x)$ را بدست آورید؟



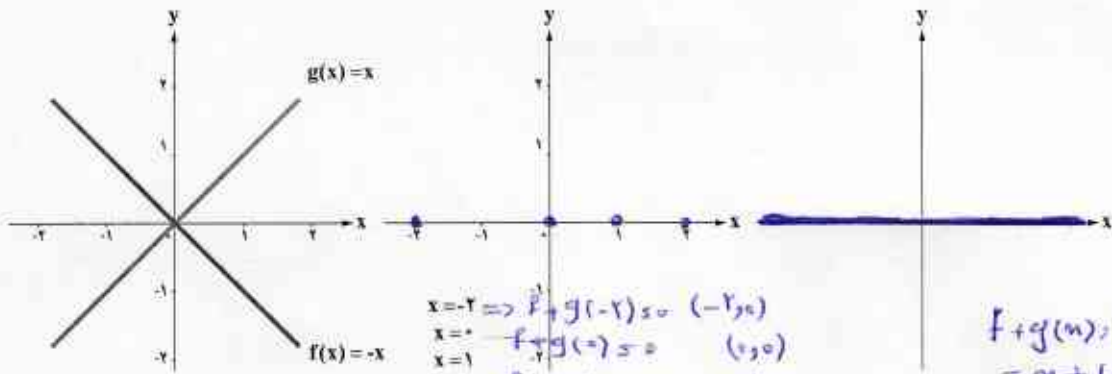
$$g(x) = \frac{x}{2}$$

۵. به کمک نمودارهای رسم شده توابع f و g ، نمودار تابع $f+g$ را ابتدا فقط در نقاط داده شده، مشخص کنید. سپس

نمودار کلی تابع $(f+g)$ را به کمک ضابطه آن و نیز نقاط مشخص شده از تابع، رسم کنید.

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$



$$f+g(x) = f(x)+g(x) = -x+x=0$$

$$\begin{aligned}
 x=-2 &\Rightarrow f+g(-2) = 0 & (-2, 0) \\
 x=-1 &\Rightarrow f+g(-1) = 0 & (-1, 0) \\
 x=1 &\Rightarrow f+g(1) = 0 & (1, 0) \\
 x=2 &\Rightarrow f+g(2) = 0 & (2, 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f+g(x) &= f(x)+g(x) \\
 &= x+(-x) = 0 \\
 \Rightarrow f+g(x) &= 0
 \end{aligned}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$

خواندنی!

چرا در عبارات جبری به جای متغیر از حرف x استفاده می کنیم؟

در آثار ریاضی اسلامی برخی از اصطلاحات مانند نماد استفاده می شدند. یکی از این اصطلاحات کلمه «شی» است که آن را به جای مجهول به کار می بردند. اولین ترجمه کتاب های ریاضی دوره اسلامی به زبان اسپانیایی انجام گرفت. مشکل علمای قرون وسطایی اسپانیا که وظیفه شان ترجمه چنین متونی بود، در این زمینه این بود که حرف «ش» و کلمه «شی» قابل تبدیل به زبان اسپانیایی نبود، به دلیل آنکه در اسپانیا صدای «ش» یا «sh» وجود ندارد. صدای «ek» یا «ک» را از یونانی قدیم به شکل x یا «کای» جایگزین صدای «ش» یا «sh» کردند و بعدها که این متون به زبان های رایج تر اروپایی ترجمه شدند، حرف یونانی «کای» x، با حرف لاتین x جایگزین شد.



خواندنی ۲

صنعت کشاورزی که حتی در نگاه نخستین نیز ساده به نظر نمی‌رسد، امروزه برای پاسخ‌گویی به تقاضای روزافزون صنایع غذایی نیازمند تجزیه و تحلیل دقیق‌تر و فناوری پیشرفته‌تر است. به همین دلیل در سال ۲۰۱۶ و در یک پروژه دانشگاهی، در طرحی جالب، کاری گروهی میان کشاورزان، ریاضی‌دانان و متخصصان مهندسی آب با هدف کاهش مصرف آب و البته تمرکز بر کم نسبیدن میزان محصول شکل گرفت؛ چنان‌که در تأمین بازار و سود کشاورزان خللی به‌وجود نیاید. برای این هدف یک مدل ریاضی آبیاری طراحی شد که موارد زیر در آن به دقت در نظر گرفته شده بود:

- رابطه میان رشد گیاه و مصرف آب در هر مرحله از رشد

- بهترین زمان کاشت

- مناسب‌ترین مکان کاشت (اینکه در چه زمین‌هایی کاشت انجام شود و در چه زمین‌هایی بستر کاشت مهیا نیست) نقطه عطف این طرح این بود که کشاورزان هرگز تصور نمی‌کردند چه اطلاعات مهم و تعیین‌کننده‌ای در اختیار دارند که با این اطلاعات می‌توان به یک مدل ریاضی برای کاشت محصول دست یافت.

امروزه کمک گرفتن از مدل‌های ریاضی در کشاورزی که بر اساس اطلاعات دقیق کشاورزان طراحی می‌شوند، در صنعت کشاورزی نوین به شکل‌گیری شاخه‌ای به نام «کشاورزی دقیق» (Precision farming) انجامیده است. در این شاخه به جمع‌آوری و بررسی داده‌ها بسیار اهمیت داده می‌شود.

مثالی دیگر در این زمینه طراحی مدلی برای استفاده از کودهای شیمیایی است. در حال حاضر به کمک ماشین‌آلات مجهز به GPS برای نمونه برداری از خاک زمین‌های کشاورزی و اطلاعات تجربی کشاورزان می‌توان فهمید که چه بخشی از زمین به کود شیمیایی بیشتر و چه بخشی به کود کمتر نیاز دارد. برآیند این اطلاعات سبب می‌شود که تا میزان قابل توجهی از استفاده بی‌رویه کود شیمیایی جلوگیری شود که نتیجه مستقیم و مفید آن کمتر شدن چشمگیر نترات در منابع آبی؛ به‌ویژه آب‌های کشاورزی است.

فصل ۳- آمار

درس ۱

شماخص‌های آماری

درس ۲

سوی‌های زمانی



در دوره متوسطه تقریباً دانش‌آموزان دختر ۵۱٪ از کل دانش‌آموزان این دوره را تشکیل می‌دهند.

توجه: شایسته است یادگیری مفهومی از آمار سال قبل شود.

* ۱۰۰۰, ۱۰۰۰, ۱۰۰۰, ۱۰۰۰, ۲۰۰۰, ۲۰۰۰, ۲۰۰۰, ۲۰۰۰, ۲۰۰۰, ۲۰۰۰, ۲۰۰۰

درس ۱

شاخص های آماری

$$\text{میانگین} = \frac{۲۰۰۰ + ۲۰۰۰}{۲} = ۲۰۰۰$$

$$\bar{x} = \frac{۴ \times ۱۰۰۰ + ۲ \times ۲۰۰۰ + ۳ \times ۳۰۰۰ + ۴ \times ۴۰۰۰}{۱۰} = \frac{۲۱۰۰۰}{۱۰} = ۲۱۰۰$$

بسیاری از مواقع کمیت‌هایی وجود دارند که می‌توانند معرف پارامتر جامعه باشند.

آیا می‌توانید چند کمیت را که در سال قبل با آن آشنا شدید، نام ببرید؟ نام این کمیت‌ها چه بود؟ میانگین، میانگین رده‌ای، ...
 جامعه: دانش‌آموزان یک مدرسه یا رانندگان میانی‌ترین قد دانش‌آموزان آبی مدرسه

فعالیت

نمونه‌گیری از هزینه و درآمد خانوارها، یکی از مهم‌ترین طرح‌های آمارگیری در هر کشوری است. آیا تاکنون فکر کرده‌اید چگونه متوسط درآمد ماهیانه هر خانواده را در یک کشور محاسبه می‌کنند؟ سرشماری روشی مقرون به صرفه برای گردآوری داده‌ها برای پاسخ به این سؤال نیست.

در اینجا صورت ساده‌تر آن را در نظر می‌گیریم. فرض کنید، می‌خواهیم متوسط درآمد کارکنان یک مؤسسه تجاری را محاسبه کنیم. ده نفر از کارکنان را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم. اگر درآمد ماهیانه ده نفر برحسب هزار تومان به صورت زیر باشند،

میانگین و میانگین درآمد ماهیانه آنها چقدر است؟

هیئت مدیره مؤسسه تجاری تصمیم دارد به کارکنانی که درآمد کمتری دارند، پاداش پرداخت کند. به نظر شما به چه کسانی باید پاداش پرداخت شود؟ اگر تعداد اعضای خانواده هر عضو نمونه به صورت زیر باشد، میانگین و میانگین درآمد هر یک از افراد چقدر است؟ آیا با داشتن این داده‌ها نظر شما درباره سؤال قبل تغییر کرده است؟ یعنی به کدام یک از کارکنان مؤسسه پاداش پرداخت کنیم؟

بله
 که درآمد زیر میانگین دارند

ردیف	درآمد ماهیانه (هزار تومان)	تعداد اعضای خانوار	متوسط درآمد هر عضو
۱	۱۰۰۰	۳	$\frac{۱۰۰۰}{۳} \approx ۳۳۳,۳۳$
۲	۳۰۰۰	۴	$\frac{۳۰۰۰}{۴} = ۷۵۰$
۳	۱۰۰۰	۱	$\frac{۱۰۰۰}{۱} = ۱۰۰۰$
۴	۴۰۰۰	۵	$\frac{۴۰۰۰}{۵} = ۸۰۰$
۵	۳۰۰۰	۱	$\frac{۳۰۰۰}{۱} = ۳۰۰۰$
۶	۳۰۰۰	۷	$\frac{۳۰۰۰}{۷} \approx ۴۲۸,۵۷$
۷	۲۰۰۰	۳	$\frac{۲۰۰۰}{۳} \approx ۶۶۶,۶۶$
۸	۱۰۰۰	۴	$\frac{۱۰۰۰}{۴} = ۲۵۰$
۹	۲۰۰۰	۲	$\frac{۲۰۰۰}{۲} = ۱۰۰۰$
۱۰	۱۰۰۰	۱	$\frac{۱۰۰۰}{۱} = ۱۰۰۰$

* ۲۵۰, ۳۳۳,۳۳, ۴۲۸,۵۷, ۶۶۶,۶۶, ۷۵۰, ۸۰۰, ۱۰۰۰, ۱۰۰۰, ۱۰۰۰, ۱۰۰۰, ۲۰۰۰

$$\text{میانگین} = \frac{۷۵۰ + ۸۰۰}{۲} = ۷۷۵$$

۵۶

$$\bar{x} = \frac{۲۵۰ + ۳۳۳,۳۳ + ۴۲۸,۵۷ + ۶۶۶,۶۶ + ۷۵۰ + ۸۰۰ + ۱۰۰۰ + ۱۰۰۰ + ۱۰۰۰ + ۲۰۰۰}{۱۰} = \frac{۹۲۲۸,۵۶}{۱۰} = ۹۲۲,۸۵۶$$

$387,5 - 332,33 = 55,17 \rightarrow 55,17 \times 3 = 165,51$ (کاربر شماره ۱)
 $387,5 - 250 = 137,5 \rightarrow 137,5 \times 4 = 550$ (کاربر شماره ۲)

خط فقر حداقل درآمدی است که برای زندگی یک نفر در یک ماه مورد نیاز است. خط فقر برابر است با نصف میانگین یا نصف میانه درآمد ماهیانه افراد جامعه.

کار در کلاس

در فعالیت قبل خط فقر را به دو روش ذکر شده محاسبه کنید. هیئت مدیره مؤسسه تجاری تصمیم دارد مقدار یارانه را بر اساس نصف میانه محاسبه کند. به کدام یک از کارکنان چه میزان یارانه بدهند که خانواده او حداقل درآمدی بیش از خط فقر داشته باشد؟

$\frac{775}{2} = 387,5$ (نصف میانه)
 $\frac{122857}{2} = 61428,5$ (نصف میانگین)

کار در کلاس

خط فقر بین المللی توسط بانک جهانی در سال جاری حدود چهار هزار تومان (۱/۲۵ دلار آمریکا) برای هر نفر در روز تعیین شده است.

- در فعالیت قبل چند خانوار درآمدی کمتر از چهار هزار تومان دارند.
- اگر درآمد یک خانواده سه نفری در یک ماه دو میلیون تومان باشند، طبق این تعریف این خانواده چه وضعیتی دارد؟
- متوسط درآمد ماهیانه یک خانواده سه نفره در ماه حداقل چقدر باشد تا شخص فقیر نباشد؟
- در فعالیت قبل میزان یارانه را با خط فقر بین المللی برای هر یک از کارکنان محاسبه کنید.
- چه موقع دو روش محاسبه خط فقر تفاوت زیادی باهم دارند؟ چرا؟

شناختن یک معیار آماری است که تغییرات نسبی در جامعه آماری را نشان می دهد.

شناختن آنها نه تنها مانند جداول فراوانی و نمودارها، متغیرهای داده ها را خلاصه می کنند؛ بلکه واقعیت های مفیدی را از جامعه به ما نشان می دهند و امکان مقایسه را فراهم می کنند. مثلاً خط فقر شناختی است که درآمد افرادی را که حداقل درآمد برای زندگی را ندارند، مشخص می کند. این شناخت به ما کمک می کند در طی زمان امکان بررسی تأثیر سیاست های دولت ها برای فقرزدایی را رصد کنیم.

جراحی راهبلی اتومبیل، چراغ های فشار، اظطار، سرعت سنج، چراغ راهبلی اتومبیل، چراغ های فشار، اظطار، در سطح موتور



دانشورده خودرو که از میان اینها اتفاقات داخل خودرو برخی از مهم ترین شاخص ها را به راننده نشان می دهد.

دما سنج آب، چراغ فشار، نشانگر میزان سوخت، چراغ، صفحه نمایش چرخ، آمپر نمایش مسافت طی شده، دکل انتخاب کیلومتر شمار، مسافت دمای بالای آب، مقدار حداقل میزان سوخت، مسافت سفر وضعیت دنده در گیربکس اتوماتیک، سفر و عملکرد تنظیم نور پشت زمینه

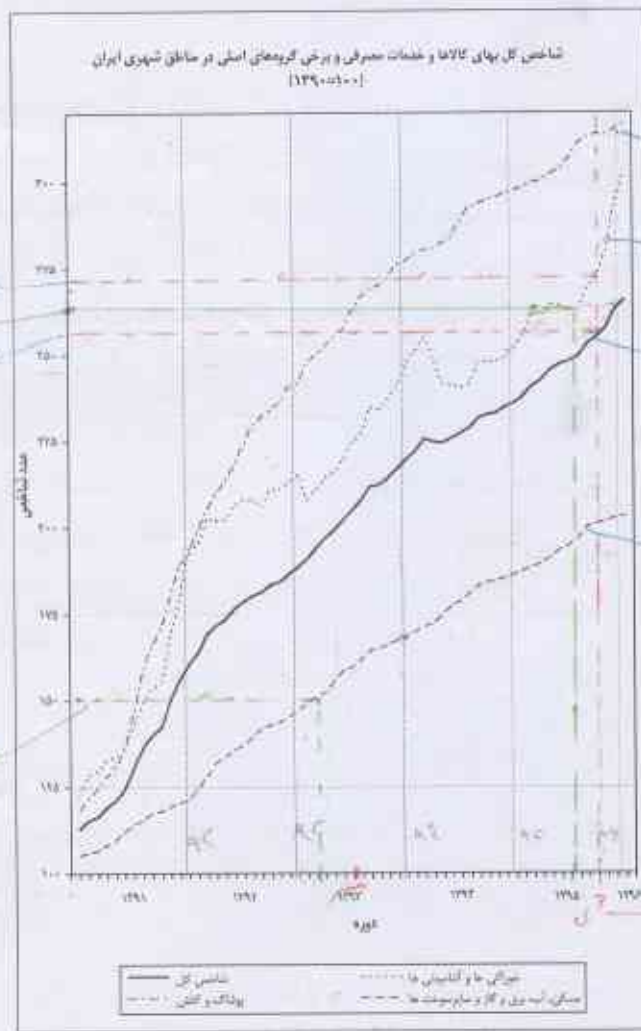
۱- ساز این تعریف خط فقر (Poverty line) به دلیل سادگی آن استفاده شده است. دولت ها از تعریف بسیار دقیق تری استفاده می کنند. در این کتاب منظور از خط فقر همین تعریف است.
 ۲- معمولاً شناختن ها (Indices) بر اساس چند آماره محاسبه می شوند. هدف ما تحلیل و تفسیر آنهاست.

فعالیت	محاسبه	فعالیت	محاسبه
۱	$\frac{1000000}{3 \times 30} \approx 11111,11$	۶	$\frac{2000000}{\sqrt{30}} \approx 142857,14$
۲	$\frac{2000000}{4 \times 30} = 25000$	۷	$\frac{2000000}{3 \times 30} \approx 22222,22$
۳	$\frac{1000000}{1 \times 30} \approx 33333,33$	۸	$\frac{1000000}{4 \times 30} \approx 8333,33$
۴	$\frac{4000000}{5 \times 30} \approx 26666,66$	۹	$\frac{2000000}{2 \times 30} \approx 33333,33$
۵	$\frac{2000000}{1 \times 30} = 100000$	۱۰	$\frac{1000000}{1 \times 30} = 100000$

فعالیت

می‌خواهیم با پرداخت بازانه ثابت به خانوارها تعداد کسانی را که درآمدی کمتر از خط فقر دارند، کاهش دهیم. اگر بودجه این کار ثابت باشد، به نظر شما آن را بین همه خانوارها تقسیم کنیم یا خانوارهایی که درآمدی کمتر از خط فقر داشته‌اند؟ پاسخ خود را برای خط فقر بین‌المللی نیز بیان کنید.

فرض کنید هدف ما کنترل فقر یا شاخص بین‌المللی آن باشد و تصمیم گرفته‌ایم که به خانوارهایی که درآمدی کمتر از خط فقر دارند، بازانه دهیم. آیا با این تصمیم به هدف خود رسیده‌ایم؟ برای پاسخ دقیق‌تر به این سؤال نیاز به معرفی شاخص دیگری داریم. در ادامه نمودار پراکنش نگاشت شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی^۱ مناطق شهری در طی ۵ سال متوالی رسم شده است. این شاخص بر اساس متوسط هزینه ۳۰۰ نوع کالا، خوراک و خدمات برای هر ماه محاسبه می‌شود. از جمله می‌توان به هزینه‌های مسکن، پوشاک، سلامت، غذا، حمل‌ونقل و تحصیل اشاره کرد. البته موارد ذکر شده دارای اهمیت یکسانی در محاسبه نیستند.



این شاخص نسبت به یک سال پایه محاسبه می‌شود که در نمودار عدد ذکر شده درصد تغییرات نسبت به سال پایه ۱۳۹۰ است.

۱-CPI: Consumer Price Index

شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی، متوسط مبلغ پرداخت شده از سوی مصرف کنندگان برای مجموعه‌ای از تعداد زیادی کالا و خدمت در طول یک سال است. این شاخص تحولات قیمت را بر مبنای یک سال پایه نشان می‌دهد.

مثال

به‌عنوان مثال اگر سبد هزینه خانواری در سال پایه از دو کالای نان و گوشت تشکیل شده باشد و قیمت این دو کالا در سال پایه به ترتیب ۱۰۰۰ و ۵۰۰۰ ریال باشد و در سال مورد نظر به ۱۵۰۰ و ۷۰۰۰ ریال برسد و با فرض آنکه مقادیر مصرفی نان و گوشت در سال پایه به ترتیب معادل ۲۰۰ و ۸۰ کیلوگرم باشد، برای محاسبه شاخص به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\text{شاخص بهای نان و گوشت} = \frac{(1500 \times 200) + (7000 \times 80)}{(1000 \times 200) + (5000 \times 80)} \times 100 = \frac{590000}{420000} \times 100 = 1/4 = 0.5 \times 100 = 140/5$$

← **استه چایی (۱۰۰ x) عامتانه است**

کار در کلاس

۱. در نمودار شاخص بهای کالاها و خدمات محور طول‌ها نشان‌دهنده **سال** و محور عرض‌ها نشان‌دهنده **مقدار شاخص** است.

۲. شاخص بهای کالاها و خدمات به واحد اندازه‌گیری بستگی **ندارد**.

۳. به نظر می‌رسد افزایش شاخص بهای کالاها و خدمات نشان‌دهنده **افتادگی** هزینه اقلام خوراکی و **بهبود** است.

۴. شاخص بهای کالاها و خدمات بر اساس **تعداد زیاد** متغیر محاسبه می‌شود.

۵. اهمیت شاخص بهای کالاها و خدمات چیست؟ **این شاخص تحولات قیمت را بر مبنای یک سال پایه نشان می‌دهد.**

تعال به سوال قبل باز می‌گردیم. آیا پرداخت یارانه ثابت طی سال‌های آتی (مثلاً ۴۵۰۰۰ تومان به ازای هر نفر) می‌تواند در **هفته**

این مدت درآمد خانوار را بیشتر از خط فقر نگه دارد؟ **خیر**

این شاخص، سطح قیمت‌ها را در یک سال اندازه‌گیری می‌کند.

خواندنی

در اقتصاد، یک جریان جرخشی پول و کالاها و خدمات و عوامل تولید وجود دارد. به‌عنوان مثال، وقتی آقای شکوهی به‌عنوان طراح در یک شرکت سازنده تزیینات داخلی ساختمان کار می‌کند، درآمدی به دست می‌آورد که می‌تواند آن را برای خرید کالاها و خدمات، خرج کند. آقای شکوهی در طول سال، درآمدش را صرف خرید کالاها و خدمات گوناگونی می‌کند. او وقتی به فروشگاه می‌رود، ۱۰۰ هزار تومان با خود می‌برد و مجموعه‌ای از کالاهای مورد نیاز خانواده‌اش را می‌خرد. فرض کنیم خریدهایش اینها باشند: شیر، تخم‌مرغ، برنج، گوشت، چای و شکر. او همچنین بنزین برای خودرو و سواری‌اش می‌خرد و هزینه اجاره خانه و قبض آب و برق و گاز و تلفن را می‌پردازد. او در این سال، یک تلویزیون می‌خرد؛ به یک مسافرت می‌رود، و یک عمل جراحی هم انجام می‌دهد.

هر یک از خانوارها و افراد جامعه در طول سال، هزینه‌هایی این چنین دارند. هزینه‌های همه خانوارها در هر سال، شاخص به نام «شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی یا شاخص قیمت مصرف‌کننده» را می‌سازد که برای کل اقتصاد محاسبه می‌شود. این شاخص، سطح قیمت‌ها در یک سال را اندازه می‌گیرد.

شاخص بهای کالاها و خدمات نشان می‌دهد که با بولمان جقدر می‌توانیم خریده کنیم، یا به اصطلاح، «قدرت خرید» بولمان جقدر است. هرچه قیمت‌ها افزایش یابند، «قدرت خرید» بولمان کاهش می‌یابد.

آقای شکوهی در سال بعد نیز به فروشگاه می‌رود و همان مبلغ ۱۰۰ هزار تومان را خرج می‌کند. او متوجه می‌شود که این بار نمی‌تواند همه کالاهای قبلی را با همان ۱۰۰ هزار تومان بخرد. علت این موضوع، افزایش قیمت کالاها و خدمات در طول زمان است. در واقع، «هزینه زندگی» او افزایش یافته است. او نه تنها وقتی که به فروشگاه می‌رود، باید پول بیشتری بپردازد، بلکه برای بر کردن پاک بنزین خودرو یا برای یک شب اقامت در شهری دیگر باید پول بیشتری بپردازد.

تعبیر متوسط قیمت کالاها و خدمات در طول زمان را توژم می‌نامند.

توژم، یکی از مهم‌ترین مفاهیم اقتصادی است که شما به آسانی می‌توانید درک کنید. توژم بر زندگی تک‌تک ما اثرگذار است. اقتصاددانان و آماردانان با کمک یکدیگر، میزان توژم یا تغییرات سطح قیمت‌ها را با استفاده از «شاخص بهای کالاها و خدمات» محاسبه می‌کنند. برای این کار، شاخص بهای کالاها و خدمات یک سال را با سال‌های قبل مقایسه می‌کنند. به نظر شما رابطه بین توژم و شاخص بهای کالاها و خدمات چیست؟

از تقسیم تفاضل شاخص در سال مورد نظر و شاخص در سال پایه بر عدد ۱۰۰، افزایش قیمت‌ها به درصد در فاصله بین سال پایه و سال مورد نظر به دست می‌آید.

$$\text{توژم} = \frac{(\text{شاخص بهای گوشت و نان در سال پایه}) - (\text{شاخص بهای گوشت و نان در سال مورد نظر})}{100} = \frac{140/5 - 100}{100} = 0/405 = 40\%$$

کار در کلاس

از مدرسه به خانه برمی‌گشتم و داشتم از کنار دکه روزنامه‌فروشی رد می‌شدم که جمله درشت یکی از روزنامه‌ها نظرم را جلب کرد: «در صورتی که رشد اقتصاد سالانه یک درصد باشد، در سال ۱۴۰۰ نرخ (شاخص) بیکاری تحصیل‌کردگان آموزش عالی به ۴۸ درصد خواهد رسید».

با خودم گفتم پس در زمانی که ما قرار است شاغل شویم، احتمال یافتن شغل پنجاه‌بنجاه است. تا به حال به این مسئله توجه نکرده بودم و فکر می‌کردم اگر درس بخوانم، شغل خوبی خواهم داشت و می‌بنداشتم درس خواندن سخت است! اما نسبت به کار پیدا کردن خیلی راحت‌تر است.

این جمله را با معلم درس آمار در میان گذاشتم. او گفت: نرخ بیکاری عبارت است از نسبت جمعیت بیکار به جمعیت فعال. این نرخ با رشد اقتصادی پنج درصد نیز محاسبه شده و اگر رشد اقتصادی ۵ درصد برای کشور به دست آید، نرخ بیکاری تحصیل‌کردگان به ۲۶ درصد می‌رسد. سپس او با یک توضیح و چند سؤال، نظرم را درباره همه ماجرا عوض کرد. بیکار به فردی بالای ۱۶ سال می‌گویند که به‌طور موقت بیکار شده یا در جست‌وجوی شغل باشد، یا منتظر شروع یک کار جدید از تاریخ مشخصی باشد. این تعریف برای تمام کشورها یکسان است.

آیا به نظر شما شاخص بیکاری برای چهار زیرگروه رشته‌های تحصیلی یکسان است؟ در هر رشته چگونه؟

ب دلیل مشخص نکردن تعداد خانوارها قابل حل نمی باشد * با این معنی

تمرین

۱. اگر میانگین درآمد خانوارهای کشور ۳۵۰۰۰۰۰ ریال باشد، حداقل حقوق دریافتی کارکنان شرکت الف چقدر باشد تا هیچ کارمندی در این شرکت زیر خط فقر نباشد؟ چه زمانی از میانه درآمد خانوارها برای محاسبه خط فقر استفاده می کنیم؟

۲. خانواده ای شش نفره در یکی از کشورهای در حال توسعه زندگی می کنند. با توجه به تعریف خط فقر بین المللی درآمد ماهانه این خانواده باید چند دلار باشد تا زیر خط فقر نباشد؟ حداقل بالایی ۲۲۵ دلار باشد. $225 \times 30 \times 1.25 = 8437.5$ دلار

۳. نرخ بیکاری در این منطقه چقدر است؟ تقریباً ۱۶.۷ درصد. $\frac{200}{1200} = 16.7\%$

۴. خانواده آقای صالحی در فروردین ماه سال ۱۳۹۰، پانصد هزار تومان هزینه ماهانه مسکن، آب، برق، گاز و سایر سوخت ها داشته است. در همان تاریخ هزینه ماهانه خوراکی ها و آسمابندی های این خانواده دوست و پنجاه هزار تومان بوده است. اگر تعداد افراد این خانواده تغییری نکرده باشد، بر مبنای نمودار شاخص بهای کالا و خدمات مصرفی موارد زیر را به طور تقریبی محاسبه کنید. فرمول در سوال ۷

الف) هزینه ماهانه مسکن، آب، برق، گاز و سایر سوخت های این خانواده در خرداد ماه ۱۳۹۳ $\frac{500}{1200} \times 200 = 83.33$ هزار تومان
ب) هزینه ماهانه خوراکی ها و آسمابندی های این خانواده در مهرماه ۱۳۹۵ $\frac{250}{1200} \times 200 = 41.67$ هزار تومان

۵. نماتوب یا شاخص توده بدنی که در سال گذشته آن را در کتاب ریاضی و آمار خود دیدید، یکی دیگر از شاخص های مهم آماری است که به شاخص سلامت معروف است. برای محاسبه آن باید وزن فرد را به کیلوگرم بر توان دوم قدش بر حسب متر تقسیم کرد.

شاخص = $\frac{وزن}{(قد)^2}$

جدول زیر اطلاعات خانواده صالحی را نشان می دهد.

افراد خانواده	سن (سال)	وزن (کیلوگرم)	قد (سانتی متر)	شاخص
صالح	۱۷	۶۲	۱۷۷	۲۲
برادر	۲۲	۸۵	۱۸۲	۲۳
خواهر	۲۵	۵۳	۱۷۰	۲۳
مادر	۵۰	۶۰	۱۶۵	۲۵
پدر	۵۵	۸۱	۱۷۴	۲۶

اکنون با توجه به جدول بالا مشخص کنید کدام یک از افراد این خانواده وزن مطلوبی دارند؟ $\frac{22.5}{100} = 22.5\%$

۶. در موقع خرید کتاب های داستان معمولاً به سطح کتاب برای رده سنی مشخص شده، توجه می کنیم. به نظر شما چگونه این کار را انجام می دهند؟ آیا نظر افراد با تجربه برای تعیین سطح یک متن به خصوص همیشه یکسان است؟ ارزیابی آنها کیفی است یا کمی؟

۴) $\frac{500 \times 150}{100} = 750$ هزار تومان

ب) $\frac{250 \times 242}{100} = 605$ هزار تومان

۱) $\frac{350000}{5} = 70000$ تومان

* با فرض اینکه ۳۵۰۰۰۰۰ تومان درآمد ماهانه یک خانواده ۵ نفره است سه راهی را حل می کنیم

باز این طبق جدول ضریب ۵ خانوارها ۱۷۰۰۰۰۰۰ تومان در خط فقر هستند
زمانی از میان درآمد خانوارها استفاده می کنیم که داده صورتها داشته باشیم

خوانایی متن میزان سهولت درک متن از طریق انتخاب واژه‌های مناسب و رعایت دستور نگارش است.

یکی از شاخص‌های خوانایی که سال‌های تحصیل خواننده متون انگلیسی را تخمین می‌زند، به صورت زیر تعریف شده است.
 شاخص پایه آموزش = $(\frac{1}{4} \times \text{میانگین تعداد کلمات در هر جمله} + \text{درصد کلمات «دشواری»})$
 که منظور از کلمات «دشواری» کلمات دو هجا بدون در نظر گرفتن اسامی و کلمات ترکیبی آسان است. این شاخص عددی بین ۱ تا ۱۲ است که نشان دهنده پایه تحصیلی است.

الف) برای کتابی با متوسط طول جملات ۸ کلمه‌ای و ۲۰ درصد کلمه سخت، شاخص پایه آموزش را محاسبه کنید. این کتاب مناسب دانش‌آموزان چه پایه‌ای است؟

پاسخ: این کتاب مناسب دانش‌آموزانی است که پایه $\frac{1}{4} \times 8 + 20 = 3.2$ را به پایان رسانده‌اند.
 ب) مزایا و محدودیت‌های این شاخص چیست؟

پاسخ: استفاده از این شاخص ساده است. با این حال، فرض می‌کند که کلمات بزرگ‌تر و جملات طولانی‌تر باعث سخت شدن متن می‌شوند، اما یک نویسنده چیره‌دست می‌تواند با کلمات و جملات دیگری باعث آسان شدن متن شود.

ج) همان‌گونه که متوجه شده‌اید، این شاخص بر اساس دو آمار از دو متغیر تعریف شده است. آنها را نام ببرید.
 هزینه‌های زندگی خانواده آقای صالحی در سال ۱۳۹۰ در جدول زیر آمده است. با توجه به نمودار شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی جدول زیر را کامل کنید.

(طبق جدول صفحه ۵۸)

	۱۳۹۰	مهر ماه ۱۳۹۳	دی ماه ۱۳۹۶
هزینه خوراکی‌ها و آبنامدنی‌ها (بر حسب هزار تومان)	۲۱۰	$\frac{210 \times 225}{100} = 472.50$	$\frac{210 \times 277}{100} = 581.7$
هزینه کل (بر حسب هزار تومان)	۸۵۰	$\frac{850 \times 202}{100} = 1717$	$\frac{850 \times 255}{100} = 2167.5$

۸. شاخص یوسیدگی دندان (DMFT) در ایران برای سال ۱۳۶۰ برابر ۳ بوده است؛ یعنی هر ایرانی به طور متوسط دارای یک دندان کشیده شده، یک دندان یوسیده و یک دندان پُر شده است. این شاخص در سال ۱۳۹۵ برابر ۶ شده است. این شاخص را در سال ۱۳۹۵ تفسیر کنید. شاخص در سال ۱۳۹۵ چند درصد افزایش داشته است؟ این شاخص در سال ۱۳۶۰ نسبت به سال ۱۳۹۵ چند درصد کاهش داشته است؟

شاخص ۶ مکان دهنده ۲ دندان کشیده شده و ۲ دندان یوسیده شده و ۲ دندان پر شده.

این شاخص در سال ۱۳۹۵ نسبت به سال ۱۳۶۰ دو برابر شده است.
 یعنی سه درصد افزایش یافته است.
 این شاخص در سال ۱۳۶۰ نسبت به سال ۱۳۹۵ ۶۲٪ کاهش یافته است.
 چون شاخص نصف شده است.

درس ۲

سری های زمانی

$$\bar{x}_T = \frac{15 + 20 + 30 + 35 + 30 + 20}{6} = \frac{140}{6} \approx 23,33$$

$$S = \frac{(15 - 23,33)^2 + (20 - 23,33)^2 + 3(30 - 23,33)^2 + (35 - 23,33)^2 + (30 - 23,33)^2 + (20 - 23,33)^2}{6}$$

$$= \frac{134,44 + 55,44 + 37,44 + 147,44 + 37,44 + 13,44}{6} = \frac{282,44}{6} \approx 47,07 \quad \sigma = \sqrt{47,07} \approx 6,86$$

به نظر شما دستیابی به کدام یک از اطلاعات زیر جالب تر است؟

دمای هوای شهر محل زندگی ما در هفته آینده.

میزان آلاینده های شهر محل زندگی ما در ماه آینده.

نرخ بیکاری در زمان اخذ دیپلم.

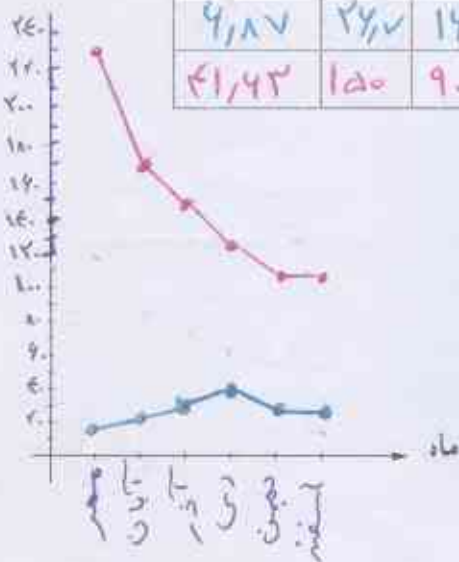
آیا به نظر شما مجموعه ای از داده های آماری که در فواصل زمانی مساوی و منظم جمع آوری شده باشند، می توانند پیش بینی

خوبی برای تصمیم گیری ما باشند؟ **بله**

فعالیت

میزان بارندگی در شش ماه دوم سال دو شهر آ و ب بر حسب میلی متر در جدول زیر آمده است

مهر	آبان	آذر	دی	بهمن	اسفند	مجموع	میانگین	انحراف معیار
شهر آ	۲۰	۳۰	۲۵	۲۰	۳۰	۱۴۰	۲۳,۳۳	۹,۱۸۷
شهر ب	۲۳۰	۱۷۰	۱۵۰	۱۳۰	۱۱۰	۹۰۰	۱۵۰	۴۱,۴۳



• جدول را کامل کنید.

• میانگین و انحراف معیار بارندگی در شهرها را مقایسه کنید.

• نمودار پراکنش نگاشت هر دو شهر را بر حسب ماه های سال با یک مقیاس

بر روی یک محور رسم کنید. نقاط را به هم وصل کنید. برای مشخص شدن

هر شهر از یک رنگ متفاوت استفاده کنید.

• کدام شهر میزان بارندگی بیشتری در پاییز نسبت به زمستان دارد؟

دانش آموزان
با این اسم
آشنا هستند

شهر ب

$$\bar{x}_T = \frac{230 + 170 + 150 + 130 + 110 + 110}{6} = \frac{900}{6} = 150$$

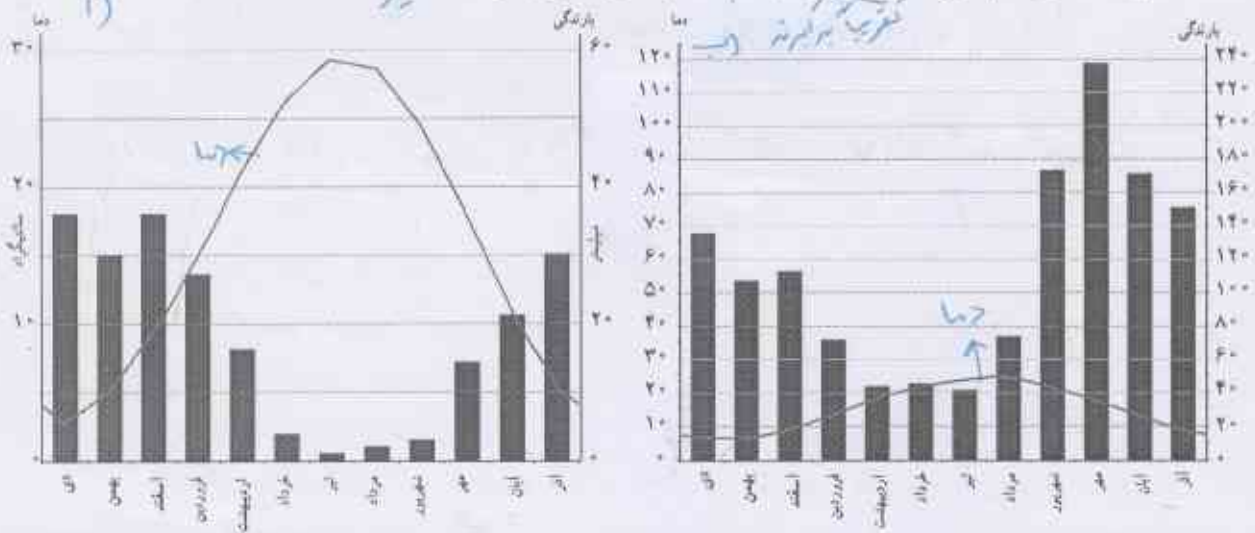
$$S = \frac{(230 - 150)^2 + (170 - 150)^2 + (150 - 150)^2 + (130 - 150)^2 + 2 \times (110 - 150)^2}{6} = \frac{6400 + 400 + 0 + 400 + 8000}{6} = \frac{10400}{6} \approx 1733,33$$

$$\sigma = \sqrt{1733,33} \approx 41,63$$

سری جغرافیایی

حال نمودار پراکنش نگاشت دما و نمودار میله‌ای بارندگی‌های همان دو شهر را با مقیاس‌های متفاوت برای یک سال به‌ویژه در یک محور رسم کرده‌ایم.

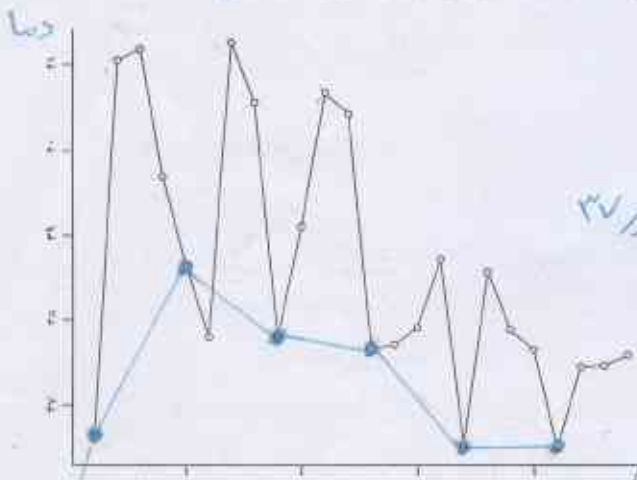
- درجه فصلی از سال بارندگی بیشتر است؟ *برای شهر آریستان برابر است - یا این*
- متوسط دمای کدام شهر کمتر است؟ آیا در تمام ماه‌های سال به همین نحو است؟ *خیر*



سری زمانی: مجموعه داده‌هایی که در طی زمان با فواصل منظم گردآوری می‌شوند.
 نمودار سری زمانی: پراکنش نگاشت سری زمانی که داده‌ها را با باره خط‌هایی در طول زمان به هم متصل می‌کند.

کار در کلاس

نوع: اشکال برجیب محورها معلوم نیست



سری زمانی زیر نشان دهنده ۶ روز درجه حرارت بدن یک بیمار مبتلا به بیماری میکروبی است. او بستری شده و درماتش با آنتی‌بیوتیک آغاز شده است.

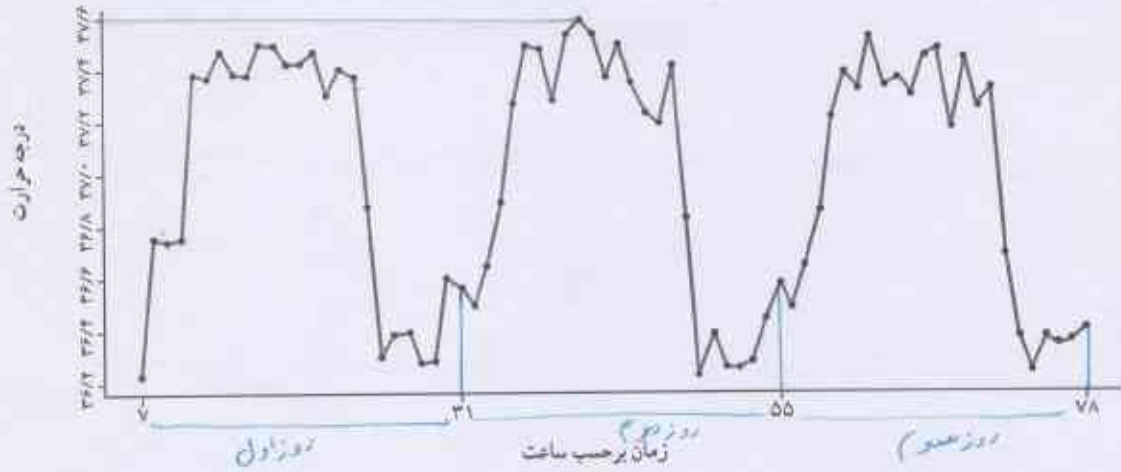
- هر روز چند درجه حرارت خوانده شده ثبت شده است.
- درجه حرارت بیمار در لحظه بستری شدن چند درجه است؟ *زیر ۳۷*
- پس از چند روز درجه حرارت بیمار به حالت طبیعی بازگشته است؟ *روز ششم به شیخ طبیعی شده است.*
- اگر اولین زمان ثبت درجه حرارت ساعت ۷ صبح باشد، نمودار را فقط برای ساعات ۷ صبح رسم کنید. کدام نمودار ساده‌تر به نظر می‌رسد؟ کدام یک جزئیات بیشتری را نشان می‌دهد؟

دما
 به صبح‌ها
 خفیف‌تر می‌شود است
 صبح‌ها
 صبح‌ها
 صبح‌ها

نمودار دما
 نمودار دما
 نمودار دما
 نمودار دما
 نمودار دما

فعالیت

درجه حرارت بدن یک انسان سالم هر ساعت طی ۳ روز از ۷ صبح اندازه‌گیری شده است.



- بیشترین دمای بدن چقدر است؟ تقریباً $37,2$ کم - زیاد - کم
- دمای بدن در طول روز اول چه تغییراتی کرده است؟ تغییرات دمای بدن در روز اول را توصیف کنید.
- آیا این تغییرات در روزهای بعد نیز تکرار شده است؟ بله
- این منحنی چه ویژگی دارد؟ (خطی، صعودی یا تناوبی) تناوبی

خواندنی

معادله منحنی دمای بدن انسان سالم در طی روز تقریباً برابر است با

$$y = 0,5 \left(\frac{1}{8} \sin^2 \left(\left(\frac{\pi}{12} \right) x - \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{98}{6} \right) - \frac{32}{9}$$

که مقدار $x=0$ دمای بدن در ساعت ۱۲ ظهر است.

نکته: مثلثاتی خواننده این

تکرار یک ویژگی را در سری زمانی الگو می‌نامند. بازآزمایی الگو به ما کمک می‌کند که چنین معادله‌هایی را برای پدیده‌های طبیعی بیابیم.

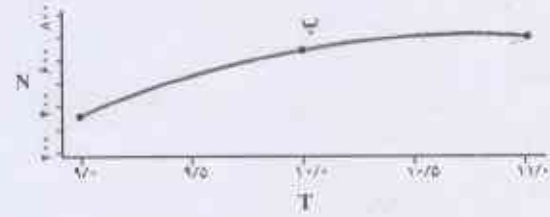
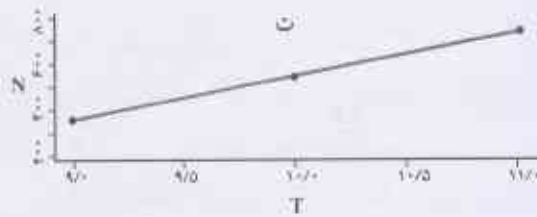
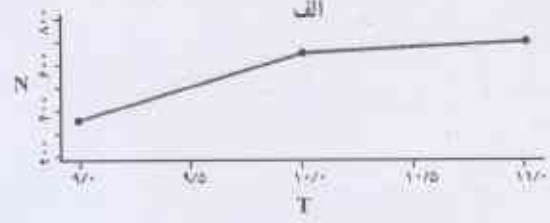
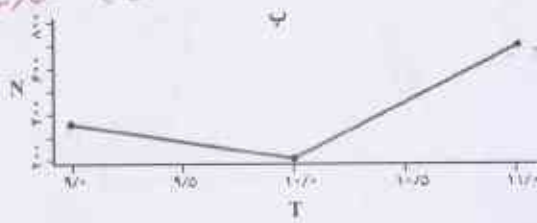
فعالیت

در یک مرکز خرید تعداد مشتری‌ها بین ساعت ۹ تا ۲۱ به صورت زیر ثبت شده است.

۹	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹	۲۱	ساعت (T)
۳۵۰	۷۵۰	۸۰۰	۶۵۰	۳۰۰	۵۰۰	۲۵۰	تعداد مشتری (N)

نمودار سری زمانی را رسم کنید.

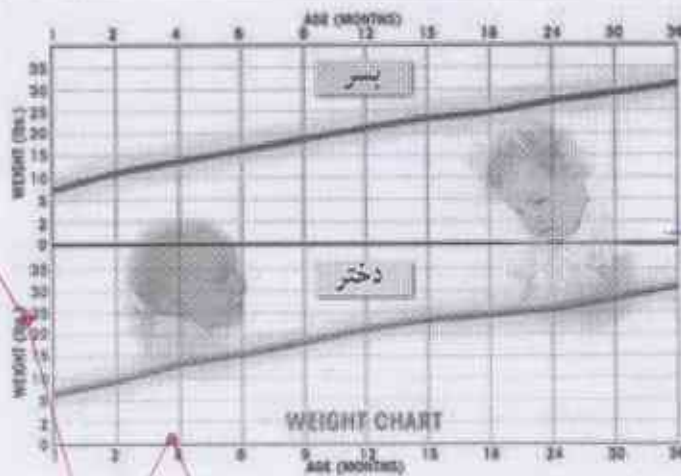
می‌خواهیم تعداد مشتری‌های ساعت ۱۰ را حدس بزنیم. به نظر شما کدام یک از نمودارهای زیر واقعی‌تر است؟ هر کدام که به نظر خودتان مناسبتر است را انتخاب کنید.



اگر فرض کنیم تعداد مشتری‌ها در فاصله زمانی ۹ تا ۱۱ به صورت یکنواخت تغییر کرده است، به سوال قبل پاسخ دهید.

درون‌یابی تخمین داده‌های بین داده‌های ثبت شده است.

تعداد مشتری



نمودار متوسط وزن نوزادان پسر و دختر یک تا ۳ ساله

۶۶

اشغال: نمودار واضح نیست

$$11 = \frac{11 - 9}{2}$$

$$f(9) : 200(9) + h = 250 \Rightarrow h = 250 - 1800 \Rightarrow h = -1550 \Rightarrow f(x) = 200x - 1550$$

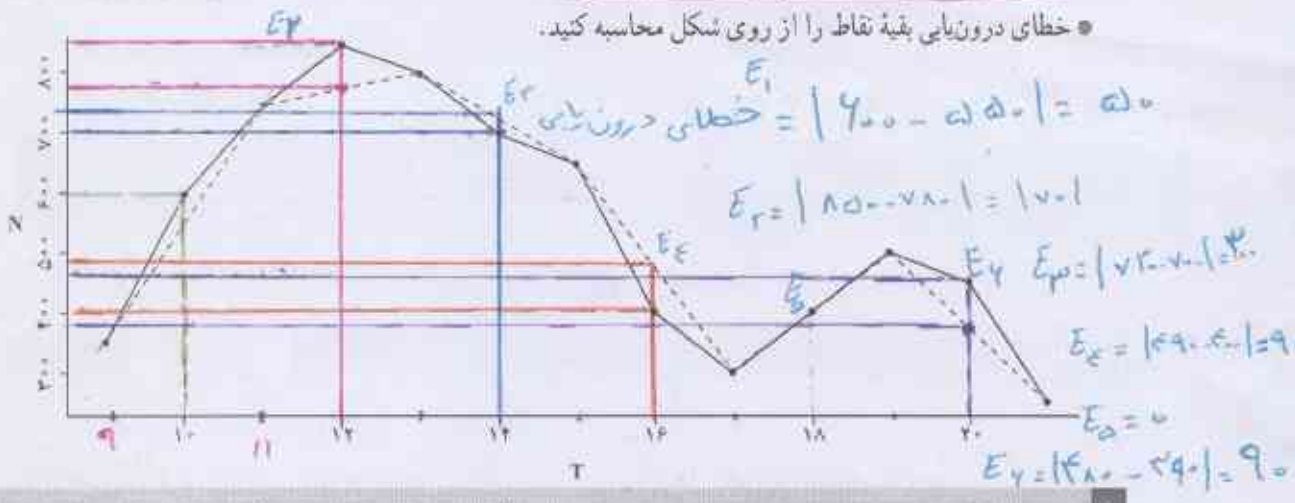
کار در کلاس

نقطه مشتری



می‌خواهیم تعداد مشتری‌های ساعت ۱۰ در فعالیت قبل را درون‌یابی کنیم. فرض می‌کنیم تعداد مشتری‌ها در فاصله زمانی ۹ تا ۱۱ به صورت یکنواخت تغییر کرده است.

- معادله خط بین دو ساعت (۹, ۳۵۰) و (۱۱, ۷۵۰) را به دست آورید.
- خط را رسم کنید. $y = 200(10) - 1550 = 2000 - 1550 = 450$
- مقدار این خط در ساعت ۱۰ چقدر است؟ ۴۵۰
- این مقدار به درون‌یابی کدام یک از شکل‌های فعالیت قبل نزدیک‌تر است؟ **شکل (ب)**
- اگر مقادیر داده‌های واقعی را به صورت ساعتی جمع‌آوری کرده باشیم که در شکل زیر با خط تور نشان داده شده است، خطای درون‌یابی ساعت ۱۰ چقدر است؟ N نشان‌دهنده تعداد مشتری‌ها و T نشان‌دهنده زمان است. (خطا برای هر نقطه برابر است با قدر مطلق تفاضل مقدار واقعی هر نقطه از درون‌یابی آن).
- خطای درون‌یابی بقیه نقاط را از روی شکل محاسبه کنید.



درون‌یابی که به وسیله یک باره خط انجام شود، درون‌یابی خطی است.



نمودار شاخص قیمت واقعی و اسمی بورس تهران در ماه‌های گذشته. رفتار این شاخص در آینده چگونه خواهد بود؟

اشکال نمودار واضح نیست

$$** m = \frac{19 - 12}{5 - 3} = \frac{7}{2} = 3,5$$

$$f(x) = 3,5(x) + h = 12 \Rightarrow h = 12 - 10,5 \Rightarrow h = 1,5$$

$$f(x) = 3,5x + 1,5$$

فعالیت

میزان فروش یک شرکت در ۵ سال متوالی برحسب میلیارد ریال به صورت زیر است

سال	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
فروش	۶	۹	۱۱	۱۵	۱۹	۲۳	۲۷

* سری زمانی را رسم کنید.

* فروش در سال هفتم را حدس بزنید. ۲۷

* میانگین سال و فروش را محاسبه کنید و روی نمودار نمایش دهید.

* یک خط از نقطه میانگین‌ها به نقطه (۵, ۱۹) وصل کنید.

* معادله خط را به دست آورید.

* اگر به جای ۲ در معادله، مقدار ۶ قرار دهید، عدد به دست آمده چقدر است؟ آیا می‌توان این مقدار را به عنوان تخمین فروش در سال آینده تصور کرد؟ بله

$$y = 3,5(4) + 1,5 = 14 + 1,5 = 15,5$$

برون‌یابی تخمین داده‌های بعد یا قبل از داده‌های ثبت شده است.

در فعالیت قبل مقدار عدد به دست آمده در سال ششم برون‌یابی مقدار فروش است.

تمرین

۱- کدام یک از داده‌های زیر سری زمانی است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

(الف) تعداد مسافران فرودگاه پوشهر در هر ماه در ۱۰ سال گذشته. \checkmark عوامل زمانی منظم است.

(ب) تعداد مشتریان یک تاجر برحسب مدت زمانی که صرف بازاریابی می‌کند. \times

(ج) تعداد ساعتی که در معرض نور مستقیم خورشید قرار داریم؛ شدت آفتاب سوختگی. \times

۲- اگر نمودارهای شکل زیر یک سری زمانی باشند، در کدام حالت درون‌یابی و برون‌یابی خطی بهتری امکان‌پذیر است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

عوامل زمانی منظم
بیان شده است

شکل‌های الف و ب - چون تقریباً روی یک خط منظم‌تر و تغییرات ناگهانی ندارند.



۶۸
امکان: بهتر است شکل‌ها اسم‌نمایی شود



فعالیت
*

جواب تمرینات صفحه ۶۹ در صفحات بعدی است

۳- یک دکه دار تعداد بطری‌های آب فروخته‌شده، از شروع فصل گرما را یک روز در میان مطابق با جدول زیر ثبت کرده است:

روز	شنبه	دوشنبه	چهارشنبه	جمعه	یکشنبه	سه‌شنبه	پنجشنبه	شنبه
تعداد بطری‌ها	۸	۱۳	۱۶	۲۵	۱۸	۲۲	۲۱	۲۳

الف) سری زمانی داده‌ها را رسم کنید.

ب) تعداد بطری‌های فروخته‌شده روزهای فرد را درون‌یابی کنید.

ج) تعداد بطری‌های فروخته‌شده دوشنبه از هفته دوم را برون‌یابی کنید.

۴- تعداد گل‌های زده شده در لیگ برتر فوتبال جام خلیج فارس در هفته‌های زوج و پایانی در جدول زیر آمده است.

هفته	۲۰	۲۲	۲۴	۲۶	۲۸
تعداد گل‌ها	۳۰	۲۷	۲۲	۲۵	۲۵

سری زمانی مربوط به آن را رسم کنید. تعداد گل‌های هفته ۳۰م را برون‌یابی کنید.

۵- میانگین افزایش خدمات یک تعمیرگاه نسبت به سال اول (سال پایه) برحسب درصد در جدول زیر آمده است.

سال	۱	۲	۳	۴	۵	۶
درآمد	۱۹/۵	۲۹	۳۸/۵	۴۸	۵۸	۶۷

الف) سری زمانی داده‌ها را رسم کنید.

ب) درصد افزایش خدمات سال هفتم این تعمیرگاه را نسبت به سال پایه برون‌یابی کنید.

۶- تعداد زلزله‌های بالای ۷ ریشتر در جهان مطابق جدول زیر برای ده سال ثبت شده است.

سال	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم	هشتم	نهم	دهم
تعداد زلزله‌های بالای ۷ ریشتر	۳۰	۲۸	۲۹	۲۳	۲۰	۱۶	۲۱	۲۵	۱۶	۲۱

الف) سری زمانی آن را رسم کنید.

ب) میانگین سال و تعداد زلزله‌ها را به دست آورید.

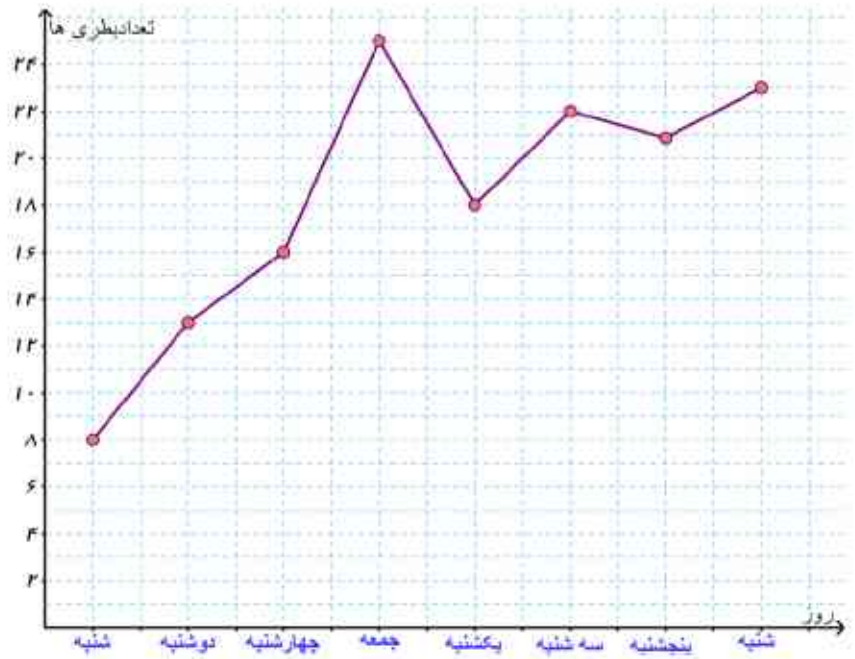
ج) معادله خطی را که نقطه (۲۱ و ۱۰) را به میانگین سال و تعداد زلزله‌ها وصل می‌کند، به دست آورید.

د) با استفاده از خطی که معادله آن را به دست آورده‌اید، تعداد زلزله‌های بالای ۷ ریشتر را در سال یازدهم در جهان برون‌یابی کنید.

ه) اگر بدانیم در سال یازدهم دقیقاً ۲۵ زلزله آمده است، خطای برون‌یابی چقدر است؟

۷- نرخ تورم در ایران بین سال‌های ۱۳۱۶ تا ۱۳۹۵ در جدول زیر داده شده است.

(الف)



(ب)

$$m = \frac{25 - 8}{7 - 1} = \frac{17}{6}$$

$$\frac{17}{6}(1) + h = 8 \Rightarrow$$

$$h = 8 - \frac{17}{6} \Rightarrow h = \frac{48 - 17}{6} \Rightarrow h = \frac{31}{6}$$

$$f(x) = \frac{17}{6}x + \frac{31}{6}$$

$$f(2) = \frac{17}{6}(2) + \frac{31}{6} = \frac{34 + 31}{6} = \frac{65}{6}$$

$$f(3) = \frac{17}{6}(3) + \frac{31}{6} = \frac{51 + 31}{6} = \frac{82}{6}$$

$$f(4) = \frac{17}{6}(4) + \frac{31}{6} = \frac{68 + 31}{6} = \frac{99}{6} = 16.5$$

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

$$\bar{y} = \frac{8 + 13 + 16 + 25}{4} = \frac{62}{4} = 15.5$$

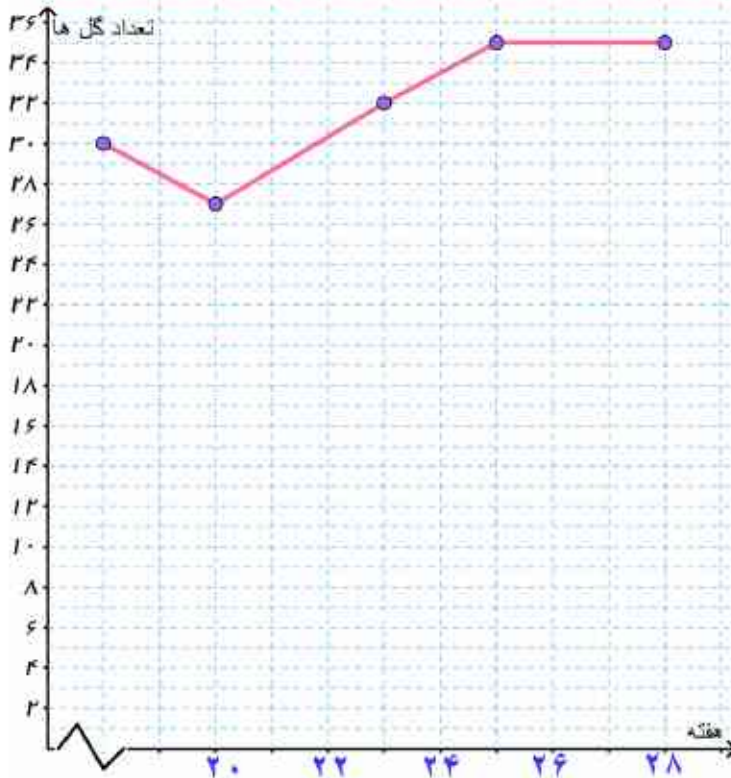
$$m = \frac{25 - 15.5}{7 - 4} = \frac{9.5}{3} = \frac{19}{6}$$

(ج)

$$\frac{19}{6}(7) + h = 25 \Rightarrow h = 25 - \frac{133}{6} \Rightarrow h = \frac{150 - 133}{6} \Rightarrow h = \frac{17}{6}$$

$$f(x) = \frac{19}{6}x + \frac{17}{6} \Rightarrow f(1) = \frac{19}{6}(1) + \frac{17}{6} = \frac{19 + 17}{6} = \frac{36}{6} = 6$$

تعداد بطری های دوشنبه هفته دوم



تمرین 4

$$\bar{x} = \frac{20 + 22 + 23 + 26 + 28}{5} = \frac{120}{5} = 24$$

$$\bar{y} = \frac{30 + 27 + 32 + 35 + 35}{5} = \frac{159}{5} = 31.8$$

$$m = \frac{35 - 31.8}{28 - 22} = \frac{3.2}{6} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{8}{15}(28) + h = 35 \Rightarrow$$

$$h = -\frac{112}{15} + 35 \Rightarrow h = \frac{-112 + 525}{15} \Rightarrow h = \frac{413}{15}$$

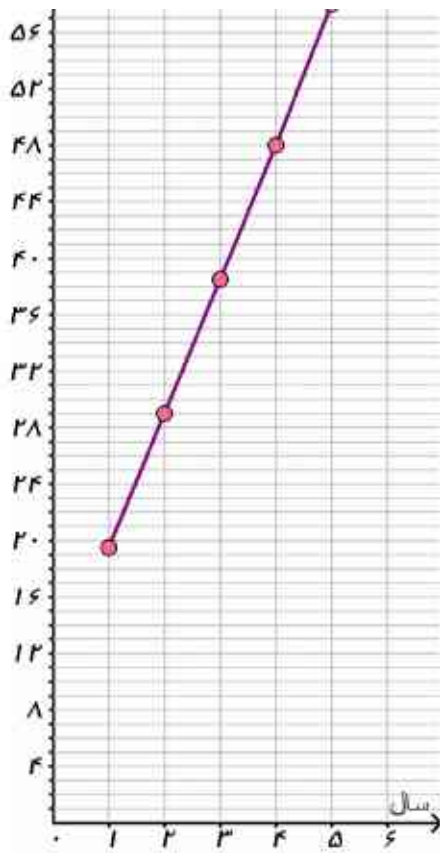
$$f(x) = \frac{8}{15}x + \frac{413}{15}$$

$$f(22) = \frac{8}{15}(22) + \frac{413}{15} = \frac{176 + 413}{15} = \frac{589}{15} = 39.27$$

I

تمرین ۷

(الف)



$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6}$$

$$\bar{y} = \frac{19.5+29+38.5+48+57+67}{6} = \frac{290}{6}$$

$$m = \frac{67 - \frac{290}{6}}{6 - \frac{21}{6}} = \frac{\frac{402}{6} - \frac{290}{6}}{\frac{36}{6} - \frac{21}{6}} = \frac{112}{15}$$

$$\frac{112}{15}(6) + h = 67 \Rightarrow$$

$$h = -\frac{152}{15} + 35 \Rightarrow h = \frac{-152 + 525}{15} \Rightarrow h = \frac{373}{15}$$

$$f(x) = \frac{112}{15}x + \frac{373}{15}$$

$$f(7) = \frac{112}{15}(7) + \frac{373}{15} = \frac{784 + 373}{15} = \frac{1157}{15} \approx 77.13$$

تمرین ۶

(الف)



$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}{10} = \frac{55}{10} = 5.5$$

$$\bar{y} = \frac{30+28+29+23+20+16+21+25+16+21}{10} = \frac{229}{10} = 22.9$$

$$m = \frac{21 - 22.9}{10 - 5.5} = \frac{-1.9}{4.5} = -\frac{19}{45}$$

$$-\frac{19}{45}(10) + h = 21 \Rightarrow h = 21 + \frac{190}{45} \Rightarrow h = \frac{945 + 190}{45} \Rightarrow h = \frac{1135}{45}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{19}{45}x + \frac{1135}{45}$$

$$f(11) = -\frac{19}{45}(11) + \frac{1135}{45} = \frac{-209 + 1135}{45} = \frac{926}{45} \approx 20.58$$

$$E = |20.58 - 25| = 4.42 \quad (ب)$$

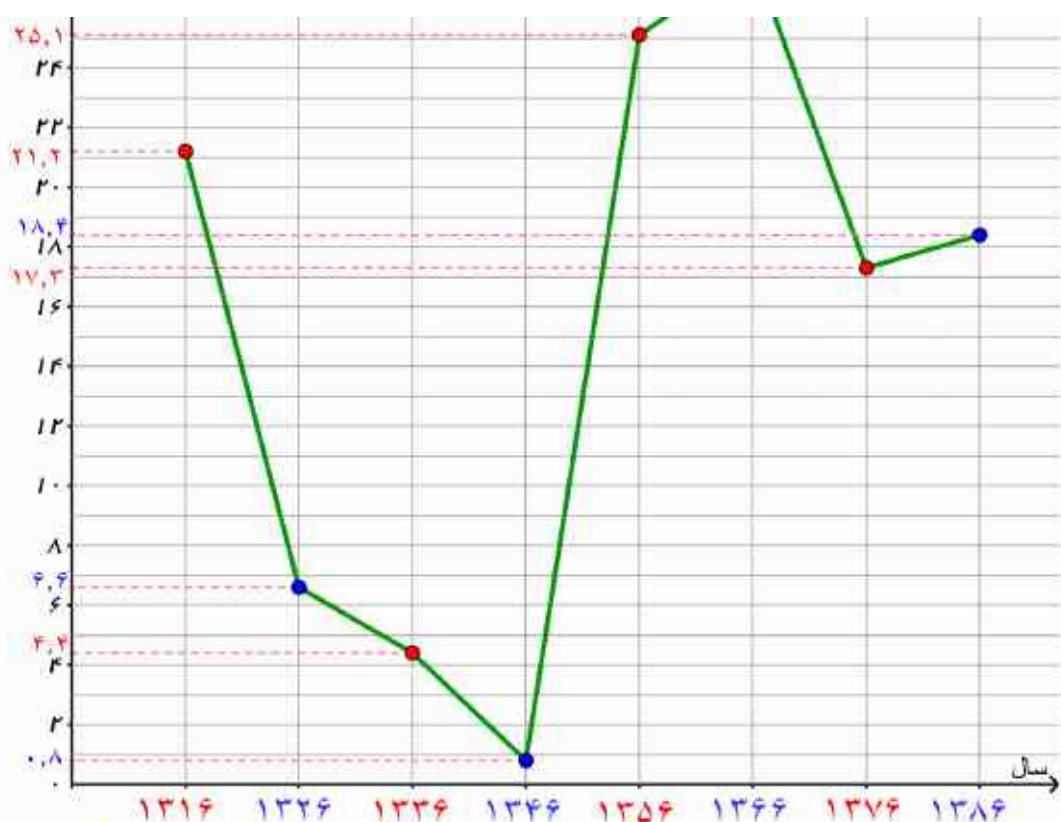
جواب نمرین صفحه ۷۰ در صفحات بعدی است

الف) نمودار سری زمانی داده‌ها را ده سال در میان رسم کنید.

ب) داده‌های را با استفاده از قسمت قبل درون‌یابی کنید.

ج) بر روی همان سری زمانی داده‌ها پنج سال در میان را با استفاده از جدول به‌روی همان نمودار رسم و خطای درون‌یابی را محاسبه کنید.

سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم
۱۳۱۶	۲۱/۲	۱۳۲۶	۶/۶	۱۳۳۶	۴/۴	۱۳۴۶	-۰/۸	۱۳۵۶	۲۵/۱	۱۳۶۶	۲۷/۷	۱۳۷۶	۱۷/۳	۱۳۸۶	۱۸/۴
۱۳۱۷	۸/۸	۱۳۲۷	۱۱/۱	۱۳۳۷	۱/۰	۱۳۴۷	۱/۵	۱۳۵۷	۱۰/۰	۱۳۶۷	۲۸/۹	۱۳۷۷	۱۸/۱	۱۳۸۷	۲۵/۴
۱۳۱۸	۸/۰	۱۳۲۸	۲/۳	۱۳۳۸	۱۳/۰	۱۳۴۸	۳/۶	۱۳۵۸	۱۱/۴	۱۳۶۸	۱۷/۴	۱۳۷۸	۲۰/۱	۱۳۸۸	۱۰/۸
۱۳۱۹	۱۳/۸	۱۳۲۹	-۱۷/۲	۱۳۳۹	۷/۹	۱۳۴۹	۱/۵	۱۳۵۹	۲۳/۵	۱۳۶۹	۹/۰	۱۳۷۹	۱۲/۶	۱۳۸۹	۱۲/۴
۱۳۲۰	۴۹/۵	۱۳۳۰	۸/۳	۱۳۴۰	۱/۶	۱۳۵۰	۵/۵	۱۳۶۰	۲۲/۸	۱۳۷۰	۲۰/۷	۱۳۸۰	۱۱/۴	۱۳۹۰	۲۱/۵
۱۳۲۱	۹۶/۲	۱۳۳۱	۷/۲	۱۳۴۱	-۰/۹	۱۳۵۱	۶/۳	۱۳۶۱	۱۹/۲	۱۳۷۱	۲۴/۴	۱۳۸۱	۱۵/۸	۱۳۹۱	۳۰/۵
۱۳۲۲	۱۱-۰/۵	۱۳۳۲	۹/۲	۱۳۴۲	۱/۰	۱۳۵۲	۱۱/۲	۱۳۶۲	۱۴/۸	۱۳۷۲	۲۲/۹	۱۳۸۲	۱۵/۶	۱۳۹۲	۳۴/۷
۱۳۲۳	۲/۷	۱۳۳۳	۱۵/۹	۱۳۴۳	۴/۵	۱۳۵۳	۱۵/۵	۱۳۶۳	۱۰-۰/۴	۱۳۷۳	۳۵/۲	۱۳۸۳	۱۵/۲	۱۳۹۳	۱۵/۶
۱۳۲۴	-۱۴/۴	۱۳۳۴	۱/۷	۱۳۴۴	-۰/۳	۱۳۵۴	۹/۹	۱۳۶۴	۶/۹	۱۳۷۴	۴۹/۴	۱۳۸۴	۱۰-۰/۴	۱۳۹۴	۱۱/۹
۱۳۲۵	-۱۱/۵	۱۳۳۵	۸/۸	۱۳۴۵	-۰/۸	۱۳۵۵	۱۶/۶	۱۳۶۵	۲۳/۷	۱۳۷۵	۲۳/۲	۱۳۸۵	۱۱/۹	۱۳۹۵	۹



(ب) توجه سال 1316 را سال یک در نظر گرفته ایم بنابراین سال 1386 سال 71 است.

$$m = \frac{18.8 - 21.2}{71 - 1} = \frac{-2.4}{70} = -\frac{24}{700} = -\frac{6}{175}$$

$$-\frac{6}{175}(71) + h = 18.8 \Rightarrow h = \frac{282}{175} + \frac{1880}{175} \Rightarrow h = \frac{2162}{175} \Rightarrow f(x) = -\frac{6}{175}x + \frac{2162}{175}$$

(ج)



I

$$f(11) = -\frac{P}{100}(11) + \frac{212P}{100} = \frac{-11P + 212P}{100} = \frac{201P}{100} = 2.01 \Rightarrow E = |2.01 - 2.0| = 0.01 \quad \text{در سال ۱۳۲۶}$$

$$f(19) = -\frac{P}{100}(19) + \frac{212P}{100} = \frac{-19P + 212P}{100} = \frac{193P}{100} = 1.93 \Rightarrow E = |1.93 - 1.9| = 0.03 \quad \text{در سال ۱۳۳۱}$$

$$f(21) = -\frac{P}{100}(21) + \frac{212P}{100} = \frac{-21P + 212P}{100} = \frac{191P}{100} = 1.91 \Rightarrow E = |1.91 - 1.9| = 0.01 \quad \text{در سال ۱۳۳۶}$$

$$f(29) = -\frac{P}{100}(29) + \frac{212P}{100} = \frac{-29P + 212P}{100} = \frac{183P}{100} = 1.83 \Rightarrow E = |1.83 - 1.9| = 0.07 \quad \text{در سال ۱۳۴۱}$$

$$f(31) = -\frac{P}{100}(31) + \frac{212P}{100} = \frac{-31P + 212P}{100} = \frac{181P}{100} = 1.81 \Rightarrow E = |1.81 - 1.9| = 0.09 \quad \text{در سال ۱۳۴۶}$$

$$f(39) = -\frac{P}{100}(39) + \frac{212P}{100} = \frac{-39P + 212P}{100} = \frac{173P}{100} = 1.73 \Rightarrow E = |1.73 - 1.9| = 0.17 \quad \text{در سال ۱۳۵۱}$$

$$f(41) = -\frac{P}{100}(41) + \frac{212P}{100} = \frac{-41P + 212P}{100} = \frac{171P}{100} = 1.71 \Rightarrow E = |1.71 - 1.9| = 0.19 \quad \text{در سال ۱۳۵۶}$$

$$f(49) = -\frac{P}{100}(49) + \frac{212P}{100} = \frac{-49P + 212P}{100} = \frac{163P}{100} = 1.63 \Rightarrow E = |1.63 - 1.9| = 0.27 \quad \text{در سال ۱۳۶۱}$$

$$f(51) = -\frac{P}{100}(51) + \frac{212P}{100} = \frac{-51P + 212P}{100} = \frac{161P}{100} = 1.61 \Rightarrow E = |1.61 - 1.9| = 0.29 \quad \text{در سال ۱۳۶۶}$$

$$f(59) = -\frac{P}{100}(59) + \frac{212P}{100} = \frac{-59P + 212P}{100} = \frac{153P}{100} = 1.53 \Rightarrow E = |1.53 - 1.9| = 0.37 \quad \text{در سال ۱۳۷۱}$$

$$f(61) = -\frac{P}{100}(61) + \frac{212P}{100} = \frac{-61P + 212P}{100} = \frac{151P}{100} = 1.51 \Rightarrow E = |1.51 - 1.9| = 0.39 \quad \text{در سال ۱۳۷۶}$$

$$f(69) = -\frac{P}{100}(69) + \frac{212P}{100} = \frac{-69P + 212P}{100} = \frac{143P}{100} = 1.43 \Rightarrow E = |1.43 - 1.9| = 0.47 \quad \text{در سال ۱۳۸۱}$$

$$f(71) = -\frac{P}{100}(71) + \frac{212P}{100} = \frac{-71P + 212P}{100} = \frac{141P}{100} = 1.41 \Rightarrow E = |1.41 - 1.9| = 0.49 \quad \text{در سال ۱۳۸۶}$$

منابع

- ۱- هاک، سوزان. **فلسفه منطق**، (ترجمه : سیدمحمدعلی حجتی)، انتشارات طه.
- ۲- امیری، حمیدرضا، ایلخانی پور، بدالله. **مبانی ریاضیات گسسته**. انتشارات مدرسه.
- ۳- سام، لوید. **معماها و سرگرمی های ریاضی**، (ترجمه : کاظم فائقی)، انتشارات امید یزدانی، ۱۳۶۴.
- ۴- ایگل ویتس، بوریس، استریل، جودیت. **مقدمه ای بر استدلال ریاضی**، (ترجمه : غلامرضا یاسی پور)، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۶.
- ۵- شهریاری، پرویز و همکاران، **دانشنامه ریاضی**، انتشارات کانون فرهنگی آموزش، ۱۳۹۲.
- 6- Canton, B. **Mathematics of Data Management**, Mc Graw – Hill, 2002.
- 7- Ministry of Education. **Mathematical Development 5.3**, Austed Publishing, Western Australia.
- 8- Smith, P. **An Introduction to Godel's Theorems**, Cambridge University Press, 2013.
- 9- Nickerson, R. S. **Mathematical Reasoning: Patern, proldems, conjectures, and proofs**, Psychology press, 2010.
- 10- Henriksen M. **What is Godel's theorem**, Scientific American, January, 1999.



بسمه تعالی

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی جهت ایفای نقش خطیر خود در اجرای سند تحول آموزش و پرورش و برنامه درسی ملی، مشارکت معلمان را به‌عنوان سیاست اجرایی مهم دنبال می‌نماید. برای تحقق این امر با بهره‌مندی هوشمندانه از فرصت‌های فناوری‌های نوین در اقدامی نوآورانه سامانه تعاملی برخط اعتبارسنجی کتاب‌های نونگاشت راه‌اندازی شد تا با دریافت نظرات معلمان درباره کتاب‌های درسی نونگاشت کیفیت تولیدات سازمان را بهبود بخشیده و محتوای کتاب‌های درسی را در اولین چاپ سپاری با کمترین اشکال به دانش‌آموزان و معلمان ارجمند تقدیم نماید. در انجام مطلوب فرآیند اعتبارسنجی همکاران گروه تحلیل محتوای آموزشی و پرورشی، گروه‌های آموزشی، دبیرخانه راهبری دروس در استان‌ها، شورای هماهنگی تألیف دفاتر، دبیرخانه پروژه اعتبارسنجی سازمان در هماهنگی و اجرا، نقش سازنده‌ای را داشتند. ضمن ارج نهادن به تلاش همکاران شرکت‌کننده در فرآیند اعتبارسنجی، اسامی دبیران و هنرآموزانی که تلاش مضاعفی را در این زمینه داشته و با ارائه نظرات خود سازمان را در بهبود محتوای این کتاب یاری کرده‌اند به شرح زیر اعلام می‌نماید.

محسن باهو

مشاور معاون وزیر و مدیر پروژه اعتبارسنجی

اسامی دبیران و هنرآموزان شرکت‌کننده در اعتبارسنجی کتاب ریاضی و آمار (۲) گد ۱۱۱۲۱۲

ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت	ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت
۱	عباس اسدی قلعه رشیدی	چهارمحال و بختیاری	۱۵	مرضیه شریف زاد	ایلام
۲	اکرم سلامی	آذربایجان شرقی	۱۶	لیلا صوری	فارس
۳	سویلا چناری	کرمانشاه	۱۷	ابوب خلیلیان گل سفیدی	چهارمحال و بختیاری
۴	جواد کاوانلویی	خراسان شمالی	۱۸	تهمینه امیر خسروی	کرمان
۵	فاطمه عمویی	شهر تهران	۱۹	نذرت دانش	کرمان
۶	ساره ماه‌گلی	خراسان جنوبی	۲۰	عبداللطیف حسین پور	هرمزگان
۷	پروین طالب حسامی آذر	کردستان	۲۱	جمال نوین	یزد
۸	جواد راشدی	خراسان جنوبی	۲۲	گل بخت دهلوی ناگان	سیستان و بلوچستان
۹	معصومه رجب پور	همدان	۲۳	طاهره دانش شکیب	گیلان
۱۰	مهری میرحاج	سمنان	۲۴	زهرا ملتس	شهرستان‌های تهران
۱۱	اکبر رضائی پور	قزوین	۲۵	فریدون حسنی شیروان شاهی	آذربایجان غربی
۱۲	منور صفائی	سمنان	۲۶	علی مهرنیا	آذربایجان شرقی
۱۳	وحیده سلیمانی	گلستان	۲۷	رحیم بردیده	مازندران
۱۴	شهره رنجبران	همدان	۲۸	نرجس زنگارکی	مرکزی

« ورود به سایت

بانک گام به گام
دیجی کنکور



وبسایت دیجی کنکور بزرگترین مرجع جزوات از ابتدایی تا کنکور

دیجی کنکور

رسانه دانش آموزان موفق

DigiKonkur.com

کنکوری ها
یازدهمی ها
دهمی ها



کانال تلگرام دیجی کنکور

یک کانال جامع به جای همه اپ ها و کانال های دیگر

دوره های مشاوره ای

برنامه ریزی روزانه

نمونه سوالات امتحانی

فیلم های کنکوری

پادکست های انگیزشی

جزوات درسی

و هر چیزی که نیاز داری و نداری ...
همه خدمات این کانال همیشه رایگان است

برای عضویت اینجا کلیک کنید



DGKonkur

