مجموعه گام به گام پایه دهم

دیجی کنکور، رسانه دانش آموزان موفق

ورود به بخش گام به گام ها

برای ورود به بخش گام به گام کلیک کنید

نیاز به
برنامه ریزی
داری؟

آیا می دونستی؟

دیجی کنکور ناشر محبوب ترین و دقیق ترین برنامه ریزی تحصیلی
ویژه پایه دهم است

۰۲۱-۲۸۴۲۲۴۱۰

فصل اول

نسبت و تناسب

۱) در جدول زیر، ستون سمت چپ اندازه‌ای را برحسب گرهٔ بزرگ و ستون سمت راست همان اندازه را برحسب گرهٔ کوچک نشان می‌دهد. این جدول را کامل کنید.

[illegible]	[illegible]
[illegible]	۲
	۳
	۴

۲) در زیر، نموداری رسم کنید که رابطهٔ بین اندازه برحسب گرهٔ بزرگ و اندازه برحسب گرهٔ کوچک را نشان دهد.

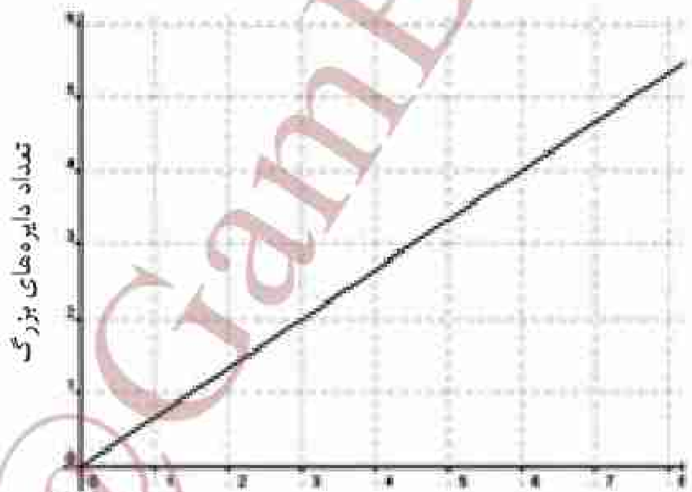
۳) اگر طول کتاب $\frac{1}{2}$ و عرض آن $\frac{3}{4}$ گرهٔ بزرگ باشد، طول و عرض کتاب را برحسب گرهٔ کوچک پیدا کنید.

۴) نسبت طول گرهٔ بزرگ به طول گرهٔ کوچک را بنویسید. چگونه می‌توانید با داشتن طول اشیا برحسب گرهٔ بزرگ، از این نسبت برای پیدا کردن طول آنها برحسب گرهٔ کوچک استفاده کنید؟

۱ جدول تکمیل شده:

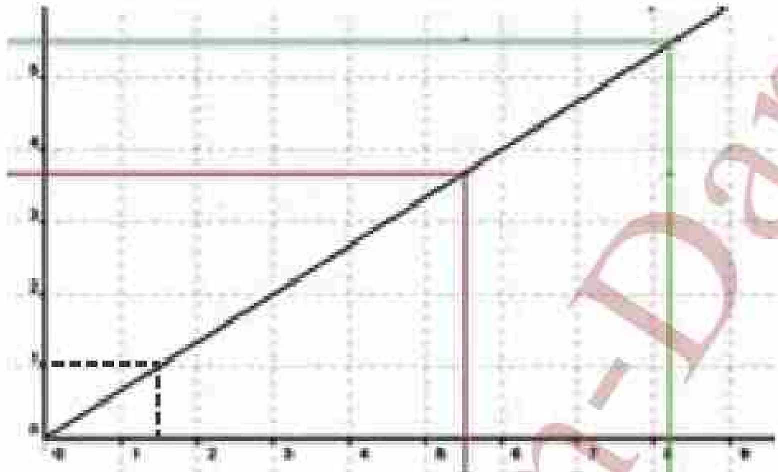
اندازه برحسب گیره‌های بزرگ	اندازه برحسب گیره‌های کوچک
۰	۰
۲	۳
۴	۶
۶	۹

۲ نمودار رسم شده:



۳ با استفاده از نمودار ملاحظه می‌شود طول و عرض برحسب گیرهٔ کوچک عبارت است از:

طول بر حسب گیرهٔ کوچک تقریباً برابر $۸\frac{۱}{۵}$ و عرض برحسب گیرهٔ کوچک برابر $۵\frac{۶}{۱۰}$ است.



۴ توجه داشته باشید که اگر از نقطه ۱ روی محور yها موازی محورها x رسم کنیم و سپس از محل برخورد آن با نمودار موازی محور yها رسم کنیم، مشاهده می‌شود که ۱/۵ گیره کوچک داریم یعنی نسبت طول گیرهٔ بزرگ به طول گیرهٔ کوچک عبارت است از $\frac{۳}{۲}$ (توجه کنید نسبت تعداد گیره‌های بزرگ به تعداد گیره‌های کوچک $\frac{۲}{۳}$ است). برای به‌دست آوردن طول برحسب گیرهٔ کوچک کافی است طول برحسب گیرهٔ بزرگ را در $\frac{۳}{۲}$ ضرب کنیم.

$$(\text{طول برحسب گیره کوچک} = \frac{۳}{۲} \times \text{طول برحسب گیره بزرگ})$$

مثلاً در این مسئله داریم: طول کتاب $۵\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}=\frac{۱۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}=۸\frac{۱}{۴}$

عرض کتاب بر حسب گیرهٔ کوچک: $۳\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۲}=\frac{۱۱}{۳}\times\frac{۳}{۲}=۵\frac{۱}{۲}$

هرگاه دو کمیت متناسب رابطهٔ مستقیم داشته باشند دارای ویژگی‌های مهم زیر هستند:

✓ با افزایش یکی از آنها دیگری نیز افزایش می‌یابد.

✓ نمودار رابطهٔ آنها یک خط راست است که از مبدأ می‌گذرد و شیب این خط همان نسبت بین دو کمیت (ضریب تبدیل) می‌باشد.

پس از حل فعالیت توسط هنرجویان می‌توان سؤالات زیر را از آنها پرسید:

- آیا با افزایش یک کمیت (یا واحد)، کمیت (یا واحد) دیگر افزایش می‌یابد یا کاهش می‌یابد.
- آیا نمودار این رابطه، یک خط راست است؟

■ آیا می‌توانید معادلهٔ این خط را بنویسید؟

■ شیب (ضریب زاویه) این خط چه چیزی را نشان می‌دهد؟

■ نمودار دو کمیت متناسب مستقیم از کدام نقطه همیشه می‌گذرد؟ (جواب: (۰ و ۰))

حل مسئله مرتبط با نسبت

۱) آیا دو نسبت ۴۲ به ۷۷ و ۶ به ۱۱ دو نسبت مساوی‌اند؟

☐ بله، K برابر است با

☐ خیر، نسبت ۶ به ۱۱ برابر است با نسبت ۴۲ به ...... و K برابر است با ......

۲) آیا دو نسبت ۲ به ۵ و ۱۰ به ۲۵ دو نسبت مساوی‌اند؟

☐ بله، K برابر است با

☐ خیر، نسبت ۲ به ۵ برابر است با نسبت ...... به ......

۳) در یک روزنامه عکس‌ها با ابعاد ۶ × ۵ چاپ می‌شوند. در مرحلهٔ صفحه‌آرایی تصمیم گرفته شد عکس‌ها با طول ۱۲ چاپ شوند. عرض عکس‌ها چقدر باید باشد؟

۱ خیر، نسبت ۶ به ۱۱ برابر است با ۴۲ به ۷۷ و K برابر است با : $\frac{۶}{۱۱}$

۲ بله، برابر است با: $\frac{۲}{۵}$

۳ $\frac{۵}{۶} = \frac{x}{۱۲} = k \Rightarrow x = ۱۲k = ۱۲ \times \frac{۵}{۶} = ۱۰$

در میدان تره‌بار، هر ۳ کیلوگرم سیب‌زمینی ۲۰۰۰ تومان است.

۱ نسبت قیمت سیب زمینی به وزن آن، برابر است با: ۳۰۰۰ تومان به ۳ کیلو گرم سیب زمینی

۲ نسبت قیمت سیب‌زمینی به وزن آن برابر است با ۱۰۰۰ تومان به ۱کیلوگرم سیب‌زمینی.

۳ این نسبت نشان می‌دهد که با ۱۰۰۰ تومان می‌توان ۱ کیلو گرم سیب‌زمینی خرید.

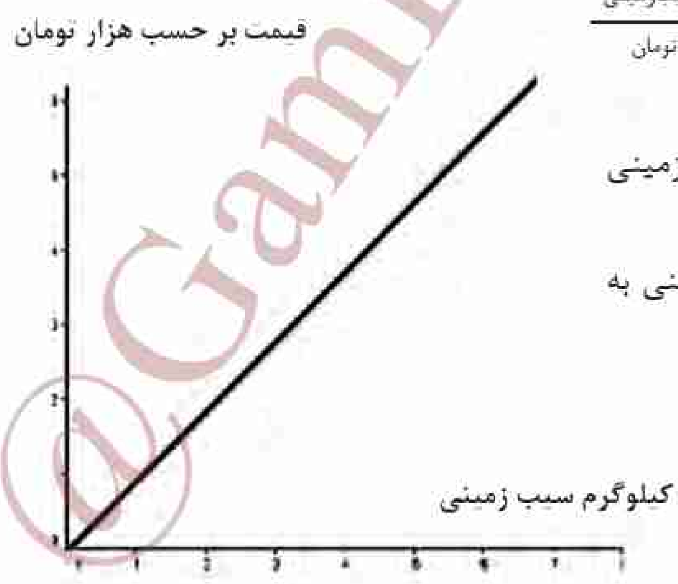
۴ نسبت وزن سیب زمینی به قیمت آن، برابر است با: ۳ کیلوگرم سیب‌زمینی به ۳۰۰۰ تومان

۵ نسبت وزن سیب‌زمینی به قیمت آن برابر است با $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ کیلوگرم سیب‌زمینی به ۱ تومان.

۶ این نسبت نشان می‌دهد که با ۱ تومان می‌توان $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ کیلوگرم (۱ گرم) سیب‌زمینی خرید.

۷ برای پیداکردن قیمت ۵ کیلوگرم سیب‌زمینی رابطهٔ زیر را کامل کنید.

$$\frac{\text{۵ کیلوگرم سیب‌زمینی}}{\text{۵۰۰۰ تومان}} = \frac{\text{۳ کیلوگرم سیب‌زمینی}}{\text{۳۰۰۰ تومان}}$$



۸ نمودار رابطهٔ بین مقدار سیب زمینی و قیمت آنها را رسم کنید.

۹ شیب، نسبت قیمت سیب‌زمینی به وزن آن را نشان می‌دهد.

در مثال‌های این قسمت نسبت دو کمیت متناسب با واحدهای مختلف (نرخ) در بافت‌های مختلف عنوان شده است تا هنرجو درک بهتری از مفهوم نرخ داشته باشد و زمینهٔ مقایسهٔ نرخ‌های مختلف از دو کمیت در بافت‌های عنوان شده فراهم شود. در این قسمت همچنین روش‌های مختلف حل مسائل مربوط به نرخ مطرح شده است.

کار در کلاس ۴

۱) نرخ مصرف بنزین به مسافت طی شده در دو ماشین مختلف به ترتیب $\frac{\text{۳۰ لیتر}}{\text{۳۲۰ کیلومتر}}$ و $\frac{\text{۲۷ لیتر}}{\text{۳۰۰ کیلومتر}}$ است. کدام ماشین باصرفه‌تر است؟

۲) بلیت‌های یک سینما در یک ساعت مانده به شروع فیلم، در هر دقیقه به میزان ثابتی به فروش می‌رسد. اگر این سینما ۲۴۰ بلیت را در ۱۶ دقیقه بفروشد، ابتدا نرخ فروش بلیت در دقیقه را پیدا کنید. سپس به کمک آن، تعداد بلیت‌های فروخته شده در هر ساعت را به‌دست آورید.

۱ نرخ مصرف در ماشین اول $۰/۰۹۳ = \frac{۳۰}{۳۲۰}$ و در ماشین دوم $۰/۰۹ = \frac{۲۷}{۳۰۰}$ است یعنی ماشین اول در یک کیلومتر ۰/۰۹۳ لیتر و ماشین دوم در یک کیلومتر ۰/۰۹ لیتر مصرف می‌کند، پس مصرف ماشین دوم کمتر و مقرون به صرفه‌تر است.

۲ نرخ فروش بلیت در دقیقه $۱۵ = ۱۶ \div ۲۴۰ = \frac{۲۴۰}{۱۶}$

های فروخته شده در ساعت: $۹۰۰ = ۶۰ \times ۱۵$

فعالیت ۳

علی و احمد **با سرعت برابر** در یک مسیر دایره‌ای دوچرخه‌سواری می‌کردند. علی زودتر از احمد دوچرخه‌سواری را شروع کرده بود؛ به طوری که وقتی او ۹ دور زده بود، احمد ۳ دور زده بود.

۱ تکمیل شدهٔ جدول:

تعداد دورهای احمد	تعداد دورهای علی
۰	۶
۳	۹
۶	۱۲
۹	۱۵

۲ کافی است از اعداد ستون اول (از سمت چپ) ۶ واحد کم کنیم تا اعداد ستون دوم به‌دست آیند. این فعالیت تمرینی است برای الگویابی در دو مرحله. ابتدا در مرحله اول، اعداد ستون سمت چپ کامل می‌شوند و سپس با کشف رابطه بین دو ستون اعداد ستون دوم کامل می‌شوند.

۳ سرعت علی ۳ برابر سرعت احمد است.

۴ تکمیل شده جدول:

تعداد دورهای احمد	تعداد دورهای علی
۰	۰
۳	۹
۴	۱۲
۵	۱۵

۵ کافی است اعداد ستون اول را بر ۳ تقسیم کنیم تا اعداد ستون دوم به‌دست آیند.
در مثال بعد از این فعالیت، سؤالی در مورد رابطهٔ بین سن دو نفر مطرح شده است. با توجه

به اینکه در هر زمان با افزودن عددی ثابت به سن یکی ، سن دیگری به دست می‌آید، این رابطه جمعی است. معادلهٔ جبری این رابطه به صورت $y = x + k$ است و می‌توان از هنرجویان خواست تفاوت آن را با معادلهٔ مربوط به نسبت مستقیم بررسی کنند.

۱) در نقشهٔ زیر، هر ۴ سانتی‌متر نشان‌دهندهٔ ۵ کیلومتر است. دو نقطه را در روی نقشه انتخاب کنید. فاصلهٔ آنها روی نقشه چقدر است؟ فاصلهٔ واقعی آنها از هم چقدر است؟

ا با استفاده از یک نقشه فاصلهٔ بین دو نقطهٔ مهم (مثلاً دو شهر مهم در نقشهٔ شهرهای ایران) را روی نقشه اندازه‌گیری کنند و به کمک مقیاس آن (که در کنار نقشهٔ درج شده است) فاصلهٔ واقعی این دو شهر را پیدا کنند و آن را با فاصلهٔ رسمی اعلام شدهٔ بین دو شهر مقایسه کنند. درصورت وجود تفاوت دلیل این تفاوت را بیابند.

۲) مینا برای تهیهٔ نوعی سس سالاد، به کتاب آشپزی مراجعه کرد. نسبت روغن به سرکه در آن سس، ۳ به ۴ بود. مینا گفت: یعنی ۷۵٪ سس روغن است. آیا مینا درست متوجه شده بود؟ توضیح دهید.

جواب: خیر، اگر نسبت روغن به کل سس ۳ به ۴ باشد ۷۵ درصد سس روغن است اما در اینجا نسبت روغن به سرکه گفته شده است.

۳) عکاسی می‌خواهد عکسی را در ابعاد ۲۵ × ۳۵ بزرگ کند و سپس آن را روی تابلویی به طول ۵۰ سانتی‌متر چاپ کند. عرض عکس بزرگ شده چقدر خواهد بود؟

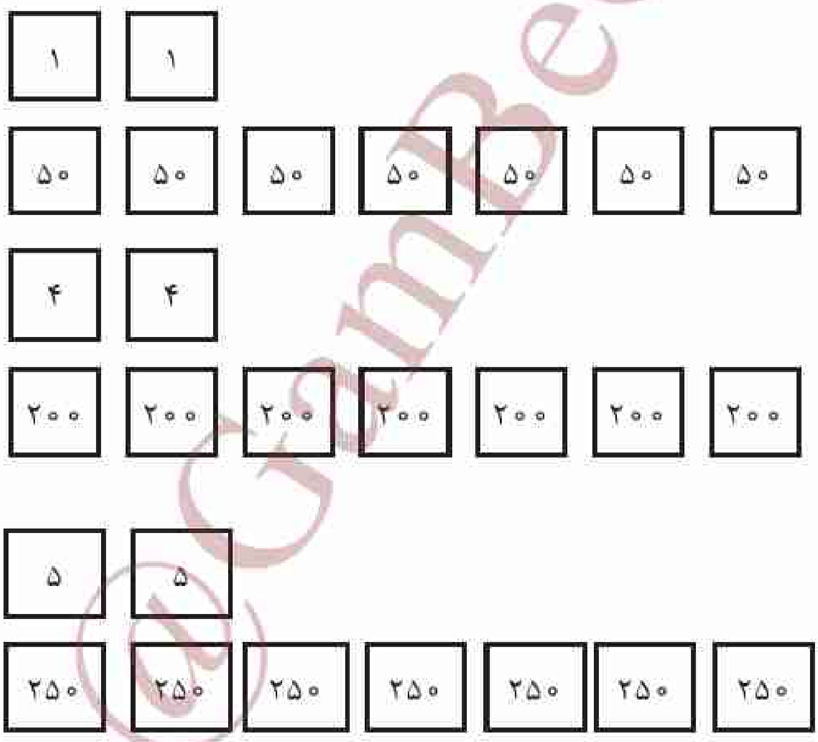
طول مقوا را متناظر طول عکس در نظر می‌گیریم:

$$\frac{۳۵}{۲۵}=\frac{۵۵}{x}=k \rightarrow x=۵۵\times\frac{۲۵}{۳۵}=\frac{۲۷۵}{۷}$$

۴) علی هر ماه مقداری ثابت پول را پس‌انداز می‌کند. جدول زیر مقدار پس‌انداز او را در چند ماه نشان می‌دهد.

شماره‌ی ماه	مقدار پس‌انداز (هزار تومان)
۲	۳۵۰
۴	۷۰۰
۶	۱,۰۵۰
۸	
۱۰	

این جدول به سه روش رسم شکل، رسم نمودار و جبری کامل کنید.

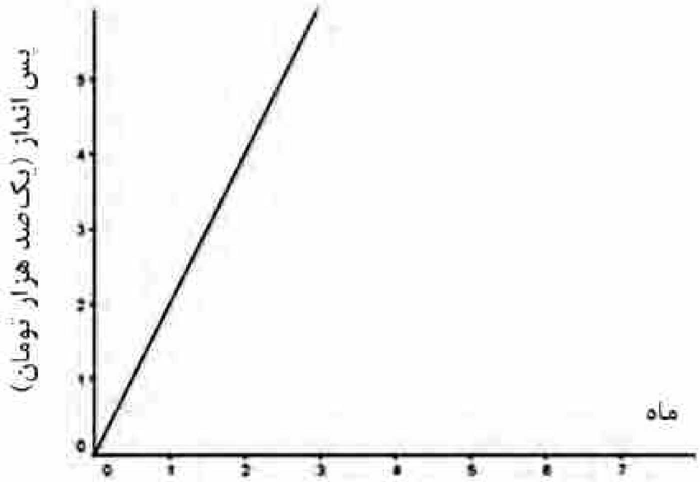


هشت ماه:

$۷\times۲۰۰=۱۴۰۰$

۱۰ ماه: $۷\times۲۵۰=۱۷۵۰$

نمودار:



جبری: پس از ۸ ماه: $۱۴۰۰ = ۸ \times \frac{۳۵۰}{۲}$ و پس از ۱۰ ماه: $۱۷۵۰ = ۱۰ \times \frac{۳۵۰}{۲}$

فعالیت ۲

برای پر کردن مخزن آبی، ۱۰ شیر آب یکسان بر سر لوله‌ها کار گذاشته شده است. دو شیر آب وقتی به طور کامل باز هستند، این مخزن در ۸ ساعت پر می‌شود.

۱) اگر ۴ شیر آب همزمان، به طور کامل باز شوند، مخزن در چند ساعت پر می‌شود؟ دبیر ارجمند زمان به من گفت خواسته باشد که شیرهای آب با هم خرف نمی‌زنند!

۲) اگر ۸ شیر آب همزمان به طور کامل باز شوند، مخزن در چند ساعت پر می‌شود؟

۳) رابطهٔ بین تعداد شیرهای باز آب و زمان پر شدن مخزن را توصیف کنید.

۱ چون تعداد شیرها دو برابر شده است، پس زمان نصف می‌شود. یعنی ۴ ساعت

۲ چون در این حالت تعداد شیرها دو برابر حالت (۱) شده است، زمان نیز نصف زمان حالت (۱) است، یعنی ۲ ساعت.

۳ هرچه تعداد شیرهایی که آب از طریق آنها وارد حوض می‌شود افزایش یابد سرعت پرشدن حوض بیشتر شده و حوض در زمان کمتری پر خواهد شد. بنابراین با افزایش تعداد شیرها، زمان پر شدن حوض کاهش خواهد یافت.

توضیحات پس از فعالیت در ایجاد درک صحیح از رابطهٔ بین دو کمیت متناسب

که رابطهٔ معکوس دارند نقش اساسی دارند بنابراین توصیه می‌شود این توضیح‌ها به‌صورت پرسش و پاسخ بین دبیر و هنرجویان مطرح شود تا همگی آنها ضمن مشارکت در فرایندِ درک مفهوم به اشکالات احتمالی خود در درک این مفهوم پی ببرند. در غیر این صورت دبیر از هنرجویان بخواهد که با مطالعهٔ متنِ پس از فعالیت، اشکالات احتمالی خود از درک مطلب را از دبیر سؤال کنند. طی مراحل ذکر شده در پرسش و پاسخ دبیر و هنرجو، در چند مسئلهٔ مشابه به درک بیشتر این مفهوم کمک می‌کند.

توجه کنید که دو کمیت متناسب که با هم رابطهٔ معکوس دارند، دارای ویژگی‌های زیر هستند.

✓ حاصل ضرب مقادیر متناظر از این دو کمیت مقدار ثابتی است، بنابراین با افزایش (کاهش) یکی از آنها دیگری کاهش (افزایش) می‌یابد.

✓ نمودار رابطه یک شاخه از هذلولی است.

پس از انجام این فعالیت می‌توان برای درک بهتر مفهوم و تشخیص نسبت‌های معکوس این ویژگی‌ها را برای هنرجویان توصیف کرد (مثلاً از روی نمودار مشخص کرد که تغییرات یک کمیت چه تأثیری بر تغییرات کمیت دیگر دارد. یا با دادن مقادیر بیشتری از یک کمیت مقدارهای بیشتری از کمیت دیگر را به‌دست آورد) و در مسائل مختلف به این ویژگی‌ها اشاره داشت.

کار در کلاس ۴

۱ ـ الف) دو کمیت متناسب را نام ببرید که با هم رابطهٔ معکوس داشته باشند.

۲) با در نظر گرفتن ارتباط این دو کمیت، مسئله‌ای طرح کنید.

۳) شمعی به طول ۱۴ سانتی‌متر را روشن می‌کنیم. این شمع در هر ۵ دقیقه ۱ سانتی‌متر کوتاه می‌شود.

الف) اگر لحظهٔ روشن کردن شمع را زمان صفر در نظر بگیریم، رابطهٔ بین زمان و طول شمع را بنویسید.

ب) با افزایش زمان، طول شمع چگونه تغییر می‌کند؟ آیا زمان و طول شمع کمیت‌های متناسب معکوس یکدیگرند؟ چرا؟

۱ مثال‌های متنوعی از محیط پیرامونی را می‌توان مطرح کرد. درصورتی که لازم باشد دبیر می‌تواند با ذکر ویژگی‌های کمیت‌های متناسب با نسبت معکوس (از جمله اینکه با افزایش مقادیر یکی مقدار دیگری کاهش می‌یابد) به ارائهٔ مثال‌ها توسط هنرآموزان کمک کند، یا پاسخ‌های درست را تفسیر و پاسخ‌های نادرست را به کمک هنرجویان تحلیل و تصحیح کند.

۲ طرح یک مسئله می‌تواند با راهنمایی دبیر انجام شود.

۳

الف) $y = ۱۴ - \frac{t}{۵}$

(یا به صورت کلامی: طول شمع برحسب سانتی‌متر = $\frac{۱}{۵}$زمان طی شده برحسب دقیقه - ۱۴)

ب) با افزایش و گذر زمان طول شمع کاهش می‌یابد. چون حاصل ضرب این دو کمیت عدد ثابتی نیست، بنابراین رابطهٔ بین این دو کمیت از نوع تناسب معکوس نیست. نمودار این رابطه بخشی از خط است درحالی که نمودار رابطه‌های معکوس یک منحنی هذلولی است. این سؤال اشاره به یک اشتباه که ممکن است برای هنرجویان اتفاق بیفتد دارد، نوع رابطهٔ بین طول شمع و مدت زمان سوختن شمع (که با افزایش زمان، طول شمع کاهش می یابد) ممکن است این تصور را در ذهن هنرجو ایجاد کند که کمیت های ذکر شده متناسب معکوس هستند. اما علاوه بر تشخیص از روی نمودار، با توجه به رابطه خطی بین این دو کمیت (و اینکه حاصل ضرب این دو کمیت یک عدد ثابتی نیست) می توان فهمید که متناسب معکوس نیستند.

۱) جاهای خالی را پر کنید.

- نسبت دوکمیت متناسب که با یک واحد اندازه‌گیری نمی‌شوند .... نامیده می‌شود.
- دو کمیت A و B را در نظر بگیرید. اگر با افزایش یک واحد از A، یک واحد از B افزایش یابد، دو کمیت رابطهٔ .... دارند.

۲) دو مثال از نرخ بیان کنید.

قیمت میوه به وزن آن، مسافت طی شده نسبت به زمان سپری شده از شروع حرکت در یک خودرو با سرعت ثابت و ....

۴) اگر ضریب تبدیل واحد A به B مقدار $\frac{۳}{۲}$ باشد به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) ۴ واحد از A معادل چند واحد از B است؟

ب) ۴ واحد از B معادل چند واحد از A است؟

پ) ضریب تبدیل واحد B به واحد A را بنویسید.

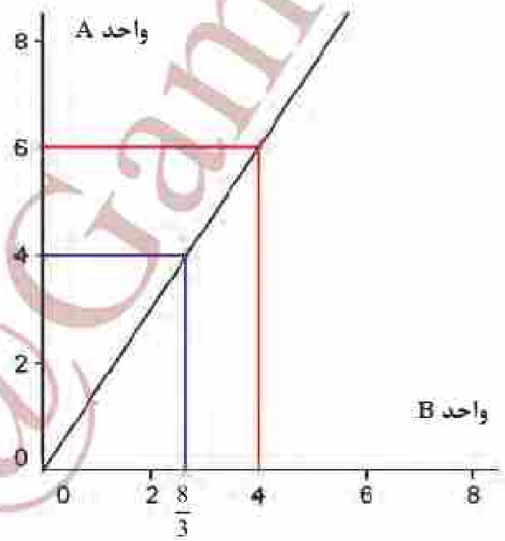
ت) رابطهٔ بین این دو واحد را با نمودار نشان دهید و به پرسش‌های الف و ب از روی نمودار پاسخ دهید.

حل: الف) $x = ۴ \times \frac{۲}{۳} = \frac{۸}{۳}$

ب) $x = ۴ \times \frac{۳}{۲} = ۶$

پ) $\frac{۳}{۲}$

ت)



۱۴) جدول زیر نوعی کالا را نشان می‌دهد که در سه اندازهٔ کوچک، متوسط و بزرگ بسته‌بندی شده است.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
کوچک	۱/۵	۱٫۲۰۰		
متوسط	۴	۳٫۰۰۰		
بزرگ	۱۵	۱۰٫۰۰۰		

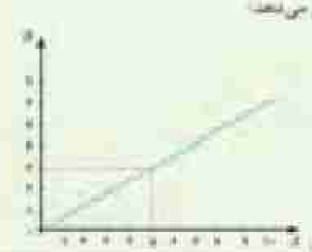
الف) جدول را کامل کنید.

ب) کدام بسته با صرفه‌تر است؟

الف) :

نوع	وزن (کیلوگرم)	قیمت (تومان)	نسبت وزن به قیمت	نسبت قیمت به وزن
کوچک	۱/۵	۱۲۰۰	۰/۰۰۱۲۵	۸۰۰
متوسط	۴	۳۰۰۰	۰/۰۰۱۳۳	۷۵۰
بزرگ	۱۵	۱۰۰۰۰	۰/۰۰۱۵	۶۶۶/۶۷

ب) بسته بزرگ زیرا قیمت آن نسبت به وزن از بقیه بسته ها کمتر است.



۱۵) نمودار مقابل رابطهٔ بین کمیت A و کمیت B را نشان می‌دهد.

الف) ضریب تبدیل A به B و B به A را بنویسید.

ب) ۳ واحد از A تقریباً معادل چند واحد از B است؟

پ) ۵ واحد از B تقریباً معادل چند واحد از A است؟

الف) ضریب تبدیل A به B عبارت است از: $\frac{۳}{۵}$ و ضریب تبدیل B به A عبارت است از: $\frac{۵}{۳}$.

ب) $\frac{۳}{۵} \times ۳ = \frac{۹}{۵} = ۱/۸$

پ) $\frac{۵}{۳} \times ۵ = \frac{۲۵}{۳} \approx ۸/۳۳$

۶) از میان کمیت‌های متناسب زیر، کدام مستقیم و کدام معکوس است؟

الف) وزن یک کالا و قیمت آن؛

ب) تعداد شیرهایی که یک حوض آب را پر می‌کنند و زمان پر شدن حوض؛

پ) زمان مکالمه با تلفن همراه و هزینهٔ آن؛

ت) تعداد مشتریان در یک بانک به زمان انتظار آنها با فرض برابری زمان سرویس‌دهی؛

ث) وزن بستهٔ پستی و هزینهٔ ارسال بدون در نظر گرفتن هزینهٔ ثابت؛

ج) تعداد کارگران و زمان انجام کار برای تخلیهٔ بارهای یک انبار؛

چ) درآمد حاصل از دریافت عوارضی در یک اتوبان و تعداد ماشین‌هایی که از آن عبور می‌کنند.

هر دو کمیت متناسب که با افزایش یکی دیگری نیز افزایش یابد مستقیم و در غیر این‌صورت معکوس است:

الف) مستقیم ب) معکوس پ) مستقیم ت) مستقیم ث) مستقیم

ج) معکوس چ) مستقیم

فصل دوم

درصد و کاربردهای آن

هنرجویان هنرستانی در یک کار فوق برنامه مشارکت داشته‌اند. ۱۰ درصد از کلاس اول، ۲۰ درصد از هنرجویان کلاس دوم و ۳۰ درصد از هنرجویان کلاس سوم در این کار شرکت کرده‌اند. تعداد هنرجویان کلاس اول ۳۰ نفر، کلاس دوم ۲۵ نفر و کلاس سوم ۴۰ نفر است.

الف) از هر کلاس چند نفر در کار فوق برنامه شرکت داشته‌اند؟

ب) چند درصد از مجموع هنرجویان این سه کلاس در کار فوق برنامه شرکت کرده‌اند؟

پ) آیا جمع درصدهای هنرجویان شرکت‌کننده از این سه کلاس معنای خاصی دارد؟

ت) یکی از هنرجویان گفت برای محاسبهٔ درصد شرکت‌کنندگان کل سه کلاس در کار فوق برنامه می‌توانیم میانگین درصد شرکت‌کنندگان کل این سه کلاس را حساب کنیم. آیا نظر او درست است؟ چرا؟ توضیح دهید.

الف) کلاس اول: $۱۰٪ \times ۳۰ = \frac{۱۰}{۱۰۰} \times ۳۰ = ۳$

کلاس دوم: $۲۰٪ \times ۲۵ = \frac{۲۰}{۱۰۰} \times ۲۵ = ۵$

کلاس سوم: $۳۰٪ \times ۴۰ = \frac{۳۰}{۱۰۰} \times ۴۰ = ۱۲$

ب) $\frac{۳+۵+۱۲}{۳۰+۲۵+۴۰} = \frac{۲۰}{۹۵} = ۰/۲۱۰۵ \Rightarrow ۰/۲۱۰۵ \times ۱۰۰ = ۲۱/۰۵ \simeq ۲۱٪$

پ) خیر، زیرا تعداد هنرجویان کلاس‌ها متفاوت است و مبنای محاسبه درصد سه کلاس یکسان نیست. برای یافتن میانگین درست باید با توجه به تعداد هنرجویان هر کلاس به درصد آن کلاس وزن داد و میانگین وزنی درصدهای شرکت کنندگان کلاس‌ها را به‌دست آورد. میانگین وزنی درصدها، همان جواب در قسمت (ب) است.
ت) خیر، جمع درصدها نشان دهنده هیچ مفهوم خاصی نیست.

در مورد محاسبات مربوط به میانگین، یکی ازاشتباهات رایج، ناشی از عدم توجه به معنی میانگین وزنی است. اگر بخواهیم میانگین چند مقدار را به‌دست آوریم باید فراوانی همهٔ آنها یکسان باشد و میانگینی که معمولاً مورد استفاده قرار می‌گیرد (حاصل تقسیم مجموع همهٔ مقادیر بر تعداد آنها) معنی دارد. اما درصورتی‌که فراوانی آنها متفاوت است (میزان اثر بخشی هر واحد از هرکدام از داده‌ها در نتیجه یکسان نیست) میانگین معمولی معنی خاصی ندارد و لازم است برای محاسبهٔ میانگین به‌طور معنی‌دار، میانگین وزنی مقادیر را به‌دست آوریم. توجه به این موضوع، به‌ویژه مواقعی که درصدهایی از چند مقدار در اختیار داریم و می‌خواهیم درصد کل مقادیر را به‌دست آوریم، موجب اجتناب از اشتباه می‌شود. با توجه به وضعیت کلاس، دبیران محترم می‌توانند جهت ارتقای مهارت محاسبهٔ درصد و درک اشتباه رایج کار در کلاس‌ها یا مسئله‌هایی منطبق با اهداف این فعالیت طرح کرده و از هنرجویان بخواهند تا آنها را حل کنند و روش حل خود را توصیف و نتایج حاصل را تفسیر کنند. در صورت وجود درک نادرست از این موضوع با ارائهٔ توضیحات مناسب می‌توان هنرجویان را به درک صحیحی از این مفهوم رساند.

یکی دیگر از اشتباهات رایج را در مسئلهٔ زیر و حل آن توسط یکی از هنرجویان می توان دید :

یکی از فروشندگان کالا در پایان هفته ۲۰ قلم از یک نوع کالا را فروخته است اگر قیمت هر قلم کالا ۳۰۰۰۰ تومان بوده باشد و ۲۰ درصد سود کرده باشد میزان سود او در هر قلم کالا چقدر است؟

حل هنرجو:

برای هر قلم کالا ۳۰۰۰۰ تومان دریافت کرده است که ۲۰ درصد آن سود می‌باشد.
بنابراین میزان سود برابر ۶۰۰۰=٪۲۰×۳۰۰۰۰ می‌باشد.

اشکال راه حل ارائه شده این است که درصد به عنوان جزئی از کلِ قیمت فروش محاسبه شده است درحالی‌که مجموع سود و قیمت تمام شده، قیمت فروش را می دهد به عبارت دیگر داریم :

قیمت تمام شده + ٪۲۰ قیمت تمام شده = ۳۰۰۰۰ تومان که اگر به‌صورت

کسری نشان دهیم داریم :

قیمت تمام شده + ٪۲۰ قیمت تمام شده = قیمت تمام شده + $\frac{۱}{۵}$ قیمت تمام شده

= $۱\frac{۱}{۵}$ قیمت تمام شده

بنابراین سود ۵۰۰۰ تومان و قیمت تمام شده ۲۵۰۰۰ تومان می‌باشد. بنابراین لازم است در محاسبه درصد سود روی قیمت تمام شده تأکید شود یعنی در اینجا کل، قیمت تمام شده است و قیمت فروش نیست.

گفتگو در کلاس دربارهٔ این‌گونه وضعیت‌ها به درک بهتر مفهوم درصد کمک می‌کند.

۱) برای خرید سه جفت جوراب هر جفت به قیمت ۵۰۰۰ تومان پس از ٪۲۰ تخفیف، چقدر باید بپردازیم؟

۲) برای خرید پیراهنی به قیمت ۳۰۰۰۰ تومان با ٪۵۰ تخفیف و یک شلوار به قیمت ۵۰۰۰۰ تومان با ٪۱۰ تخفیف، چقدر باید بپردازیم؟

۱ $۰/۲۰ \times ۵۰۰۰ = \frac{۲۰}{۱۰۰} \times ۵۰۰۰ = ۱۰۰۰ \rightarrow ۵۰۰۰ - ۱۰۰۰ = ۴۰۰۰$

پس ۴۰۰۰ × ۳ تومان باید بپردازیم

۲ قیمت پیراهن پس از تخفیف:

$$۰/۵۰ \times ۳۰۰۰۰ = \frac{۵۰}{۱۰۰} \times ۳۰۰۰۰ = ۱۵۰۰۰ \rightarrow ۳۰۰۰۰ - ۱۵۰۰۰ = ۱۵۰۰۰$$

قیمت شلوار پس از تخفیف

$$۰/۱۰ \times ۵۰۰۰۰ = \frac{۱۰}{۱۰۰} \times ۵۰۰۰۰ = ۵۰۰۰ \rightarrow ۵۰۰۰۰ - ۵۰۰۰ = ۴۵۰۰۰$$

قابل پرداخت: ۴۵۰۰۰ + ۱۵۰۰۰ = ۶۰۰۰۰

دبیران محترم در این قسمت می‌توانند با ارائه سؤالاتی نظیر کار در کلاس‌ها، در مسائلی که چند درصد مختلف بیان می‌شود، مهارت محاسبهٔ صحیح درصد یک مقدار را ارتقا دهند.

٪۲ از ۲۰،۰۰۰ تومان، ۴۰۰ تومان است. محاسبه‌های زیر را به صورت ذهنی انجام دهید و در هر مورد روش محاسبهٔ خود را توضیح دهید.

۱) ٪۴ از ۲۰،۰۰۰ تومان

۲) ٪۱۰ از ۲۰،۰۰۰ تومان

۳) ٪۹۲ از ۲۰،۰۰۰ تومان

۱ ۴درصد یک مقدار ۲ برابر ۲درصد آن است پس حاصل ۱۲۰۰=۶۰۰×۲ خواهد بود.

۲ ۱۰درصد یک مقدار ۵ برابر ۲درصد آن است پس حاصل ۳۰۰۰=۶۰۰×۵ خواهد بود.

۳ ۹۲درصد یک مقدار ۸ درصد از ۱۰۰ درصد کمتر است و ۸ درصد ۴ برابر ۲درصد آن است پس ۸ درصد مقدار ۲۴۰۰=۶۰۰×۴ و ۲۷۶۰۰=۲۴۰۰−۳۰۰۰۰ ۹۲ درصد خواهد بود.

۴ روش اول چون ۵۰ درصد نصف می‌باشد، کافی است نصف ۳۰۰۰۰ را به‌دست آوریم (۳۰۰۰۰ را بر ۲ تقسیم کنیم)، روش دوم ۵۰ درصد ۲۵ برابر ۲ درصد است پس حاصل ضرب ۲۵ در ۶۰۰ را به‌دست می‌آوریم. روش سوم ۱۰ درصد ۳۰۰۰۰ را به‌دست می‌آوریم و حاصل را در ۵ ضرب می‌کنیم، روش چهارم ضرب ۳۰۰۰۰ در ۵۰ درصد است.

لازم به ذکر است در اینجا ارائه یک قالب یا قالب‌های خاص توسط دبیر جهت انجام محاسبات ذهنی درصد هنرجویان مورد نظر نیست. بلکه ارائه مثال‌هایی از روش‌های مختلف محاسبه ذهنی درصد است. پرسیدن روش‌های محاسبه ذهنی هنرجویان و تشویق آنها برای ارائه روش‌های متنوع که توسط خود آنها ساخته شده می‌تواند مهارت‌های ذهنی آنها را ارتقا دهد. این مهارت‌ها در موارد مشابه در ها نیز قابل به‌کارگیری است.

کار در کلاس ۴

۱) ۳۳٪ درصد ۳۰۰۰۰ تومان را به چند طریق می‌توانید پیدا کنید؟ روش‌های خود را توضیح دهید.

۲) اگر بخواهید $2\frac{1}{4}$٪ عدد ۱۶۰ را به طور ذهنی به دست آورید چگونه عمل می‌کنید؟

روش اول: ۳۳ درصد را به‌طورتقریبی، کسرِ $\frac{1}{3}$ در نظر گرفته و آن را حل می‌کنیم.

$$30000\times\frac{1}{3}=\frac{30000}{3}=10000$$

روش دوم: به‌جای ۳۳ درصد از کسر $\frac{۳}{۱۰}$ استفاده می‌کنیم.

$$۳۰۰۰۰ \times \frac{۳}{۱۰} = \frac{۹۰۰۰۰}{۱۰} = ۹۰۰۰۰$$

روش سوم: آن را در $\frac{۳۳}{۱۰۰}$ ضرب کنیم:

$$۳۰۰۰۰ \times \frac{۳۳}{۱۰۰} = \frac{۹۹۰۰۰۰}{۱۰۰} = ۹۹۰۰$$

روش چهارم: ۱٪ از ۳۰۰۰۰ (که معادل تقسیم بر ۱۰۰ در محاسبه درصد است) را پیدا کرده و حاصل را در ۳۳ ضرب کنیم:

$$۳۰۰ \times ۳۳ = ۹۹۰۰$$

با توجه به نوع نیاز ما در محاسبه درصد (محاسبات کاملاً دقیق یا محاسبه تقریبی) روش مناسب برای محاسبه درصد را انتخاب می‌کنیم.

۲ ۱۲/۵درصد نصف ۲۵ درصد که $\frac{۱}{۴}$ می‌باشد. ابتدا $\frac{۱}{۴}$ را پیدا کرده و سپس بر ۲ تقسیم می‌کنیم. یعنی

$$۱۶۰ \div ۴ = ۴۰ \longrightarrow ۴۰ \div ۲ = ۲۰$$

یا می‌توان گفت: ۱۲/۵ درصد همان $\frac{۱}{۸}$ است ($\frac{۱۲/۵}{۱۰۰} = \frac{۱}{۸}$) یعنی کافی است ۱۶۰ بر عدد ۸ تقسیم شود پس حاصل ۲۰=۸÷۱۶۰ خواهد بود.

مسئله‌ها


۱) یک دروازه‌بان در بازی اول خود ۹ توپ از ۱۰ توپی را که به طرف دروازه زده شده بود، مهار کرد. این دروازه‌بان در بازی دوم خود [illegible] توپ از ۸ توپ و در بازی سوم خود ۴ توپ از ۷ توپ فرستاده شده به طرف دروازه را مهار کرد.

الف) در هر بازی، این دروازه‌بان چند درصد از توپ‌ها را مهار کرده است؟

ب) او در این سه بازی روی هم چند درصد از توپ‌ها را مهار کرده است؟

پ) آیا جمع درصد توپ‌های مهار شده در این سه بازی معنای خاصی دارد؟

الف)

$$\frac{۹}{۱۰}\times ۱۰۰=۹۰\rightarrow ۹۰\%$$

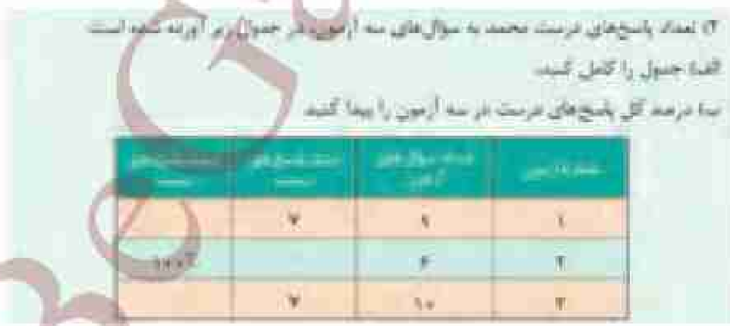
$$\frac{۵}{۸}\times ۱۰۰=۶۲/۵\rightarrow ۶۲/۵\%$$

$$\frac{۶}{۷}\times ۱۰۰=۸۵/۶\rightarrow ۸۵/۶\%$$

ب)

$$\frac{۹+۵+۶}{۱۰+۸+۷}\times ۱۰۰=\frac{۲۰}{۲۵}\times ۱۰۰=۸۰\rightarrow ۸۰\%$$

ج) خیر، چون تعداد پرتاب‌های هرکدام از بازی‌ها با دیگری متفاوت است، پس معنای خاصی ندارد.



۴) تعداد پاسخ‌های درست محمد به سؤال‌های سه آزمون در جدول زیر آورده شده است.

الف) جدول را کامل کنید.

ب) درصد کل پاسخ‌های درست در سه آزمون را پیدا کنید.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	۷	۹	۱
[illegible]		۶	۲
	۷	۱۰	۳

درصد پاسخ‌های صحیح	تعداد پاسخ‌های صحیح	تعداد سؤالات آزمون	شماره آزمون
۷۷/۷	۷	۹	۱
۱۰۰	۶	۶	۲
	۷	۱۰	۳

۳) با توجه به اینکه ٪۳۵ عدد ۲۲۰۰ برابر ۷۷۰ است، محاسبات زیر را به صورت ذهنی انجام دهید:

الف) ۷ درصد ۲۲۰۰   ب) ۷۰ درصد ۲۲۰۰   پ) ۵ درصد ۲۲۰۰

ت) ۳/۵ درصد ۲۲۰۰   ث) ۱۴ درصد ۲۲۰۰   ج) ۲۱ درصد ۲۲۰۰

الف) ۷ درصد، یک پنجم ۳۵ درصد است یعنی: $۷۷۰ \div ۵ = ۱۵۴$

ب) ۷۰ درصد، دو برابرِ ۳۵ درصد است پس: $۷۷۰ \times ۲ = ۱۵۴۰$

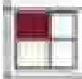
پ) ۵ درصد، یک هفتمِ ۳۵ درصد است یعنی: $۷۷۰ \div ۷ = ۱۱۰$

ت) ۳/۵ درصد، یک دهمِ ۳۵ درصد است یعنی: $۷۷۰ \div ۱۰ = ۷۷$

ث) ۱۴ درصد، دوبرابرِ ۷ درصد است یعنی: $۱۵۴ \times ۲ = ۳۰۸$

ج) ۲۱ درصد، سه برابرِ ۷ درصد است یعنی: $۱۵۴ \times ۳ = ۴۶۲$

۴) هر عدد در ستون اول جدول زیر با توصیفی در ستون دوم بیان شده است. هر عدد را به توصیف آن ارتباط دهید و برای هر یک، مثالی بیاورید.

درصد		توصیف	مثال
٪۲۵		من نصفِ نصف هستم	کسری از شکل مقابل که رنگ شده 
٪۵۰		من با یک برابرم	نسبت هر عدد به خودش
٪۳۰		من از یک‌چهارم کمتر، ولی از یک‌ششم بیش‌تر هستم	نسبت شربت به آب در یک نوشیدنی که برای هر ۵ لیتر آب نیم لیتر شربت کافی است.
٪۱		من با $\frac{۱}{۲}$ برابرم	شانس رو یا پشت آمدن در پرتاب یک سکه
٪۱۰		من از نصف کمتر و از یک‌چهارم بیشترم	نسبت شربت به آب در یک نوشیدنی که برای هر ۱۰ لیتر آب، از ۳ لیتر شربت استفاده شده
٪۱۰۰		من از $\frac{۱}{۱۰۰}$ کمترم	شانس پیروزی یک نفر در قرعه کشی که بین ۳۰۰ نفر هم شانس انجام می شود
٪۳۰۰		من یک‌دهمِ یک‌دهم هستم	شانس خروج یک مهره خاص از ظرف شامل ۱۰۰ مهره
[illegible]		من از یک بیشترم	نسبت سن یک پدر ۴۰ ساله به فرزند یک‌ساله‌اش

۵) سعید گفت اگر به عددی ۱۰ تا اضافه کنم و سپس، ۱۰ تا از حاصل کم کنم، همان عدد قبلی به دست می‌آید. حالا اگر ٪۱۰ عددی را به آن اضافه کنم و سپس ٪۱۰ حاصل را از آن (حاصل) کم کنم، آیا همان عدد اول به دست می‌آید؟ با یک مثال عددی، پاسخ سؤال سعید را به‌دست آورید.

عدد ۱۰۰ را در نظر می‌گیریم ۱۰ درصد آن عدد ۱۰ است که اگر اضافه شود حاصل ۱۱۰ خواهد بود و ۱۰ درصد این عدد ۱۱ است که اگر از ۱۱۰ کم کنیم حاصل ۹۹ خواهد بود. این‌گونه محاسبات در مورد درصد نیز از اشتباهات رایج می‌باشد که ناشی از مقایسه کردن آن با اضافه و کم کردن یک عدد به عدد دیگر است درحالی‌که در مرحله اول درصدی از ۱۰۰ و حال آنکه در مرحله دوم درصدی از ۱۱۰ حساب می‌شود که مقدار آنها متفاوت است بنابراین مقدار افزوده شده با مقدار کم شده مساوی نیست. می‌توان از هنرجویان خواست با عوض کردن مراحل (یعنی ابتدا درصدی را کم کرده و سپس همان درصد را اضافه کنیم) پاسخ را با قسمت قبل مقایسه کرده و درمورد آن توضیح دهند.

۶) درصدی بنویسید که از $\frac{1}{2}$ بیشتر و از $\frac{3}{4}$ کمتر باشد.

در این سؤال دو مطلب مورد توجه است اول: سؤالی که بیش از یک پاسخ دارد دوم: سؤالی که بیش از یک راه حل درست دارد (پرورش تفکر واگرا) مثلاً یک راه حل بیان کسر به‌صورت درصد (که با توجه به کسرهای داده شده محاسبه درصد نیز به‌صورت ذهنی و بدون محاسبه قابل انجام است) و یافتن درصد مورد نظر و راه دوم یافتن کسری بین این دو کسر و تبدیل کسر به درصد. در این سؤال هر درصد بین ۵۰ درصد و ۷۵ درصد جواب است.

۷) مسعود گفت: من می‌توانم مسئله‌های مربوط به درصد را به صورت ذهنی و خیلی سریع حساب کنم.
سعید پرسید: مثلاً سریع بگو ۹۰ درصد ۵۵ چقدر می‌شود؟ او به سرعت گفت: $۴۹/۵ = ۵/۵ - ۵۵$.
سعید پرسید: ۶ درصد ۱,۴۰۰ چقدر می‌شود؟ مسعود گفت: $۸۴ = ۱۴ \times ۶$.
سعید پرسید: ٪۲۵ عدد ۴۴ چقدر می‌شود؟ مسعود گفت: $۱۱ = ۴ \div ۴۴$.
سعید گفت: ٪۲۵ درصد حقوق من ۱۲۰,۰۰۰ تومان است. حقوق من چقدر است؟ او به سرعت جواب داد: ۴۸۰,۰۰۰ تومان.
در هر حالت، روش محاسبهٔ مسعود را توضیح دهید.

● با توجه به اینکه ۹۰ درصد به اندازهٔ ۱۰ درصد با ۱۰۰ درصد فاصله دارد ابتدا ۱۰ درصد ۵۵ را حساب کرده که ۵/۵ است و حاصل را از ۵۵ (که ۱۰۰ درصد مقدار است) کم کرده است.

● ۶ درصد همان ۶ برابر ۱٪ است که کافی است ۱٪ از ۱۴۰۰ یعنی ۱۴ را در ۶ ضرب کنیم.

● ۲۵٪ هر عددی $\frac{۱}{۴}$ آن است یعنی باید عدد بر ۴ تقسیم شود.

● ۲۵٪ هر عددی، $\frac{۱}{۴}$ آن است بنابراین خود عدد، ۴ برابر ۲۵٪ عدد است. پس باید در ۴ ضرب شود تا کل حقوق به‌دست آید.

۸) الف) ۴۹/۵، چند درصد ۳۳ است؟
ب) چند درصد از ۹۰ ، برابر با ۸۰ است؟

الف)
$$۴۹/۵ = \frac{X}{۱۰۰} \times ۳۳ \rightarrow \frac{X}{۱۰۰} = \frac{۴۹/۵}{۳۳} \rightarrow X = ۱۵۰ \rightarrow ۱۵۰٪$$

برای حلّ معادلهٔ $۴۹/۵ = \frac{X}{۱۰۰} \times ۳۳$ درصورتی که هنرجویان آمادگی لازم را نداشته باشند $\frac{X}{۱۰۰}$ را a گرفته و معادله a۳۳ = ۴۹/۵ را برحسب a حل کرده و سپس a را $\frac{X}{۱۰۰}$ گرفته و x را به‌دست آورند.

ب) چند درصد از ۹۰ برابر با ۸۰ است؟
$$۸۰ = \frac{X}{۱۰۰} \times ۹۰ \rightarrow \frac{X}{۱۰۰} = \frac{۸۰}{۹۰} \rightarrow X \simeq ۸۸/۸۹ \rightarrow ۸۸/۸۹٪$$

۹) جعفر می‌خواهد نمرهٔ ریاضی خود را از ۱۴ به ۱۸ برساند. او فکر می‌کند اگر در امتحان بعدی ۴٪ بیشتر به سؤال‌ها پاسخ درست بدهد، به هدف خود می‌رسد. آیا او درست فکر کرده است؟ توضیح دهید چرا.

$$۱۸ - ۱۴ = ۴ \rightarrow \frac{۴}{۱۴} \times ۱۰۰ = ۲۸/۵۷ \rightarrow ۲۸/۵۷٪ \simeq ۲۹٪$$

واضح است که پاسخ درست نیست و جعفر مقدار افزایش نمره را با درصد افزایش آن اشتباه گرفته است. راه حل دیگر این مسئله به‌صورت زیر است که ابتدا ۴ درصد ۱۴ را حساب می‌کنیم یعنی ۰/۵۶=۱۴×۰/۰۴ که نمره او ۱۴/۵۶ =۱۴+۰/۵۶ خواهد شد نه ۱۸.

۱۰) نرگس از فروشگاه (الف) و ناهید از فروشگاه (ب) دو کیف کاملاً یکسان خریدند. قیمت اولیهٔ کیف در هر دو فروشگاه برابر بود. در زیر، تبلیغ فروش دو فروشگاه را می‌بینید.

فروشگاه (الف): همهٔ اجناس فروشگاه با ۳۵ درصد تخفیف به فروش می‌رسد.

فروشگاه (ب): ۲۵ درصد تخفیف + ۱۰ درصد تخفیف هدیه به مناسبت بازگشایی مدارس

کدام‌یک مبلغ بیشتری پرداخته است؟ نرگس یا ناهید؟

می‌توان با یک مقدار معین (به‌عنوان قیمت کفش) این دو تخفیف را با هم مقایسه کرد:
اگر قیمت کیف ۴۰۰۰۰ تومان باشد:

درفروشگاه الف (خرید نرگس): مقدار تخفیف: ۱۴۰۰۰=۴۰۰۰۰×۰/۳۵

مقدار پول پرداخت شده توسط نرگس: ۲۶۰۰۰=۱۴۰۰۰-۴۰۰۰۰

در فروشگاه ب (خرید ناهید): مقدار تخفیف اول: ۱۰۰۰۰=۴۰۰۰۰×۰/۲۵

قیمت پس از تخفیف اول: ۳۰۰۰۰=۱۰۰۰۰-۴۰۰۰۰

مقدار تخفیف دوم: ۳۰۰۰=۳۰۰۰۰×۰/۱۰

مقدار پول پرداخت شده توسط ناهید: ۲۷۰۰۰=۳۰۰۰-۳۰۰۰۰

ملاحظه می‌شود ناهید مبلغ بیشتری پرداخته است. در اینجا می‌توان از هنرجویان خواست تا علت این تفاوت را توضیح دهند یا از آنها سؤال کرد اگر ابتدا تخفیف ۱۰ درصدی و سپس تخفیف ۲۵ درصدی اعمال شود نتیجه چگونه است؟ درصورتی‌که هنرجویان آمادگی داشته باشند می‌توان این مقایسه را به‌طور کلی و با استفاده از یک پارامتر نظیر a انجام داد.

فعالیت آموزشی

کار در کلاس ۴

۱) ۰/۲٪ از ۳ میلیون نفر، چند نفر می‌شود؟

۲) ۵ نفر از ۴۰۰۰ نفر چند درصد این افرادند؟

۳) ۱۴۰٪ از ۴۰۰ لیتر آب، چند لیتر آب است؟

۴) وزن مریم در هنگام تولد ۳ کیلوگرم بوده و در ده سالگی ۲۱ کیلوگرم است. وزن او در ده سالگی چند درصد وزن نوزادی‌اش است؟

۵) مثالی بیان کنید که رشد ۱۴۴ درصدی را نشان دهد. آن را تفسیر کنید.

۶) مثالی بیان کنید که کاهش ۸۰٪ را نشان دهد. آن را تفسیر کنید.

۱ ۰/۲٪ یعنی $\frac{۲}{۱۰۰۰}=\frac{۰/۲}{۱۰۰}$ در نتیجه داریم: $۳۰۰۰۰۰۰\times\frac{۲}{۱۰۰۰}=۶۰۰۰$

۲ $x\times ۴۰۰۰=۵\Rightarrow x=\frac{۵}{۴۰۰۰}\Rightarrow x=۰/۰۰۱۲۵\Rightarrow ۰/۱۲۵٪$

۳ $\frac{۱۴۰}{۱۰۰}\times ۴۰۰=۵۶۰$

۴ $x\times ۳=۲۱\Rightarrow x=۷\Rightarrow ۷۰۰٪$

۵ می‌توانیم از مثال جمعیت استفاده کنیم. مثلاً، جمعیت یک کشور ۵ میلیون و جمعیت کشوری دیگر ۶ میلیون و دویست هزار نفر است. جمعیت کشور دوم چند

درصد جمعیت کشور اول است؟

۶ مثلاً، قیمت یک نوع گوشی در فروشگاه ۵۸۰ هزار تومان و قیمت تولید آن در کارخانه ۵۷۵۳۶۰ تومان است.
قیمت تولید این گوشی در کارخانه چند درصد کمتر از قیمت آن در فروشگاه است؟

فعالیت آموزشی

۱) یک تساوی با عبارت ضربی بنویسید که به کمک آن بتوان $\frac{۲}{۳}$ از ۲۴ را پیدا کرد.

۲) با توجه به اینکه درصد را می‌توانیم با یک عدد کسری نمایش دهیم یک تساوی با عبارت ضربی بنویسید که به کمک آن بتوان ٪۳۰ از ۳۶ را پیدا کرد.

۳) یک تساوی با عبارت ضربی در حالت کلی بنویسید که به کمک آن بتوان درصدی از یک مقدار را پیدا کرد. در این معادله مقدار اولیه را با x، درصد را با a و مقدار نهایی را با y نشان دهید.

۴) سه مسئله را طوری طرح کنید که در یکی x، و در یکی a و در یکی y مجهول باشد.

۱ $\frac{۲}{۳} \times ۲۴ = ۱۶$

۲ $٪۳۰ \times ۳۶ = \frac{۳۰}{۱۰۰} \times ۳۶ = ۱۰/۸$

۳ $a \times x = y$ (در اینجا a به‌صورت اعشاری یا کسری نشان داده می‌شود.)

۴ مسئله ۱ـ در یک فروشگاه کفش کالاها با ٪۲۰ تخفیف عرضه می‌شود. اگر قیمت اولیهٔ یک کفش ۶۰۰۰۰ تومان باشد، خریدار چقدر تخفیف می‌گیرد؟

مسئله ۲ـ در همان فروشگاه قیمت کفشی ۳۰۰۰ تومان کاهش یافته است. قیمت اولیهٔ کفش چقدر بوده است؟

مسئله ۳ـ جمعیت یک کشور برابر ۱۲ میلیون نفر بوده است. اگر پس از چند سال جمعیت این کشور ۱۴ میلیون و ۴۰۰ هزار نفر باشد، نسبت جمعیت سال دوم به جمعیت در سال اول چند درصد است؟

علی در یک تعمیرگاه لوازم خانگی کار می‌کند. به ازای هر دستگاهی که تعمیر می‌شود ۷۰٪ هزینهٔ تعمیر را علی و بقیه را صاحب تعمیرگاه دریافت می‌کند.

الف) معادله‌ای بنویسید که رابطهٔ بین هزینه‌های دریافتی و پولی را که علی دریافت می‌کند نشان دهد.

ب) اگر علی در این ماه ۷۵۰،۰۰۰ تومان دریافت کرده باشد، صاحب فروشگاه چقدر دریافت کرده است؟

الف) $y = ۰/۷۰x = \frac{۷}{۱۰}x$

ب) راه اول: دریافتی صاحب فروشگاه از x ریال هزینه دریافتی: $x - \frac{۷}{۱۰}x = \frac{۳}{۱۰}x$

بنابراین داریم:

$$\frac{۷}{۱۰}x = ۷۵۰۰۰۰ \rightarrow x = \frac{۷۵۰۰۰۰۰}{۷} \rightarrow \frac{۳}{۱۰}x = \frac{۳}{۱۰} \times \frac{۷۵۰۰۰۰۰}{۷} = \frac{۲۲۵۰۰۰۰}{۷}$$

راه دوم: می‌توان با توجه به سهم علی (که ۷۰ درصد است) و سهم صاحب مغازه (که ۳۰ درصد می‌شود) نسبت سهم صاحب مغازه به سهم علی را از ۱۰۰ که ۳۰ به ۷۰ می‌باشد را به‌صورت کسری نوشت: یعنی $\frac{۳۰}{۷۰} = \frac{۳}{۷}$ و از آن در محاسبه سهم صاحب مغازه استفاده کرد یعنی:

$$\frac{۳}{۷} \times ۷۵۰۰۰۰ = \frac{۲۲۵۰۰۰۰}{۷}$$

مسئله‌ها

۱- جدول زیر را کامل کنید.

به‌صورت اعشاری	به‌صورت کسر	درصد
۰/۳۷۵	$\frac{۳}{۸}$	۳۷/۵٪
۱/۱	$\frac{۱۱}{۱۰}$	۱۱۰٪
۰/۰۱	$\frac{۱}{۱۰۰}$	۱٪
۰/۰۰۵	$\frac{۱}{۲۰۰}$	۰/۵٪
۰/۱۲۵	$\frac{۱}{۸}$	۱۲/۵٪
۰/۰۰۴	$\frac{۱}{۲۵۰}$	$\frac{۲}{۵}$٪

۲) ۰/۷ یک مقدار بیشتر است یا ۰/۷٪ همان مقدار ؟ چرا ؟

۰/۷ درصد یعنی $\frac{۰/۷}{۱۰۰}$ که همان $\frac{۷}{۱۰۰۰}$ است، که مقدار آن از $\frac{۷}{۱۰}$ کمتر است.

۳) یک نوع کالا در فروشگاه‌های الف و ب با تخفیف ارائه شده است:

در فروشگاه الف قیمت پس از تخفیف ۱۵۰,۰۰۰ ریال و در فروشگاه ب قیمت قبل از تخفیف ۲۰۰,۰۰۰ ریال می‌باشد. اگر درصد تخفیف فروشگاه الف برابر ۲۰٪ و فروشگاه ب برابر ۲۵٪ باشد:

الف) قبل از تخفیف، خرید از کدام فروشگاه باصرفه‌تر است؟

ب) بعد از تخفیف، خرید از کدام فروشگاه باصرفه‌تر است؟

با توجه به اینکه فروشگاه ٪۲۰ تخفیف می‌دهد پس ٪۸۰ قیمت هر کالا باید پرداخت شود. بنابراین داریم: $0/80 \times x = 150000$

فروشگاه الف) قیمت قبل از تخفیف:

$$150000 \div \%80 = \frac{150000 \times 100}{80} = 187500$$

فروشگاه ب) قیمت پس از تخفیف:

$$200000 \times \%25 = 50000 \rightarrow 200000 - 50000 = 150000$$

واضح است قبل از تخفیف خرید از فروشگاه الف مقرون به صرفه‌تر است و بعد از تخفیف قیمت در هردو فروشگاه یکسان است.

فعالیت آموزشی

فعالیت ۲

قیمت کالایی در سال گذشته a تومان بود. امسال این کالا با ۱۵٪ افزایش قیمت به فروش می‌رسد. مقدار افزایش قیمت کالا را بر حسب a بنویسید.

مقدار افزایش قیمت کالا = ... × ....

اگر قیمت جدید کالا را با b نشان دهید، معادله‌ای بر حسب a بنویسید که بتوانید به کمک آن قیمت جدید کالا را حساب کنید.

b = ... + ...

به کمک معادلهٔ بالا، درصد افزایش قیمت را بر حسب a و b بنویسید.

۱۵٪ = ۰/۱۵ = ――――

اگر تغییر قیمت [illegible] باشد، درصد تغییر قیمت را بر حسب قیمت اولیه و قیمت جدید بنویسید.

۱ مقدار افزایش کالا: $۰/۱۵ \times x = ۰/۱۵\,x$

۲ $y = x + ۰/۱۵x = ۱/۱۵x$

۳ $۰/۱۵ = \dfrac{y - x}{x}$

۴ $\dfrac{a}{۱۰۰} = \dfrac{\text{قیمت جدید} - \text{قیمت اولیه}}{\text{قیمت اولیه}}$

هرکدام از مثال‌های ارائه شده در این قسمت انواع مختلفی از مسائل مرتبط با درصد تغییر را در زمینهٔ واقعی مطرح می‌کند. در اولین مثال، مفهوم درصد تغییر با علامت مثبت (که نشان‌دهنده رشد است) ارائه شده و دومین مثال مربوط به درصد تغییری با علامت منفی است (که کاهش مقدار را نشان می‌دهد). در سومین مثال با ارائه افزایش دو کمیت (طول و عرض)، درصد تغییر کمیت مرتبط با آن (مساحت) مورد نظر است. در این مسئله برای محاسبهٔ درصد تغییر علاوه بر استفاده از رابطهٔ درصد تغییر لازم است از معادلهٔ مساحت بر حسب طول و عرض استفاده شود. در آخرین مثال نیز با ارائه درصد تغییر (افزایش و کاهش) و داشتن مقادیر اولیه، مقدار ثانویه خواسته شده است. دبیران محترم می‌توانند درصورتی‌که هنرجویان آمادگی داشته باشند، مسائل مختلفی در زمینهٔ واقعی مطرح کنند و از هنرجویان بخواهند با حل آنها و تفسیر جواب‌ها درک بهتری از موضوع درصد تغییر پیدا کنند.

کار در کلاس ۴

۱) ابعاد یک پارک به طول x و عرض y را ٪۱۰ افزایش داده‌اند. درصد تغییر مساحت این پارک را محاسبه کنید.

۲) قیمت بلیت یک موزه در ابتدای سال ٪۲۰ افزایش داشته و پس از سه ماه، دوباره ٪۱۰ افزایش یافته است. قیمت بلیت این موزه در سال گذشته ۱،۰۰۰۰ تومان بوده است.

الف) قیمت بلیت این موزه اکنون چقدر است؟

ب) درصد تغییر قیمت بلیت این موزه نسبت به سال قبل چقدر است؟ (توجه: ٪۳۰ نیست!)

۱ مساحت پارک قبل از افزایش: xy

مقدار افزایش طول: $x \times ٪۱۰ = ۰/۱x$ — مقدار افزایش عرض: $y \times ٪۱۰ = ۰/۱y$

طول پس از افزایش: $۰/۱x + x = ۱/۱x$ — عرض پس از افزایش: $۰/۱y + y = ۱/۱y$

مساحت پس از افزایش: $۱/۱x \times ۱/۱y = ۱/۲۱xy$

درصد تغییر: $\dfrac{۱/۲۱xy - xy}{xy} \times ۱۰۰ = ۲۱٪$

الف) مقدار افزایش قیمت بلیط ابتدای سال: $۱۰۰۰ \times ٪۲۰ = ۲۰۰$

قیمت ابتدای سال: $۱۰۰۰ + ۲۰۰ = ۱۲۰۰$

مقدار افزایش قیمت پس از سه ماه: $۱۲۰۰ \times ٪۱۰ = ۱۲۰$

قیمت بلیط پس از سه ماه: $۱۲۰۰ + ۱۲۰ = ۱۳۲۰$

ب) نسبت تغییر: $\frac{۱۳۲۰ - ۱۰۰۰}{۱۰۰۰} = ۳۲$ یعنی ۳۲ درصد افزایش یافته است.

مسئله‌ها

۱) در هر پرانتز عبارت درست را مشخص کنید.

الف) اگر قیمت جدید یک کالا نسبت به قیمت اولیه افزایش داشته باشد درصد تغییر (مثبت/ منفی) و اگر کاهش داشته باشد درصد تغییر (مثبت/ منفی) می‌باشد.

ب) اگر قیمت کالایی ۵,۵۰۰ تومان باشد و قیمت آن به ۷,۰۰۰ تومان رسیده باشد، درصد افزایش قیمت (بزرگ‌تر از ۱۰۰ ؛ بین ۱ و ۱۰۰ ؛ کوچک‌تر از ۱) و اگر قیمت آن به ۱۲,۰۰۰ تومان رسیده باشد درصد افزایش قیمت (بزرگ‌تر از ۱۰۰ ؛ کوچک‌تر از ۱۰۰) می‌باشد.

الف) قسمت اول: مثبت، قسمت دوم: منفی.

ب) قسمت اول: یعنی ۲۷ درصد ($۰/۲۷ \times ۱۰۰$) افزایش داشته است که عددی بین ۱ و ۱۰۰ است.

$$\frac{۷۰۰۰ - ۵۵۰۰}{۵۵۰۰} = \frac{۱۵۰۰}{۵۵۰۰} = \frac{۳}{۱۱} \approx ۰/۲۷$$

قسمت دوم: که عددی بزرگ‌تر از ۱۰۰ است. یعنی ۱۱۸ درصد ($۱/۱۸ \times ۱۰۰$) افزایش داشته است.

$$\frac{۱۲۰۰۰ - ۵۵۰۰}{۵۵۰۰} = \frac{۶۵۰۰}{۵۵۰۰} = \frac{۱۳}{۱۱} \approx ۱/۱۸$$

۲) اگر قیمت اولیهٔ یک کالا با x و قیمت جدید آن با y مشخص شده باشد، معادلهٔ $y = \frac{۱}{۴}x$ رابطهٔ بین قیمت اولیه و قیمت جدید این کالا را نشان می‌دهد.

الف) درصد تغییر را به‌دست آورید.

ب) کالایی که در سال گذشته ۱۰۰ هزار تومان بوده است، امسال چند تومان است؟

پ) کالایی که امسال ۱۰۰ هزار تومان است، در سال گذشته چند تومان بوده است؟

الف)
$$\frac{y-x}{x}=\frac{\frac{۱}{۲}x-x}{x}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow$$

یعنی این کالا ۵۰ درصد کاهش قیمت داشته است.

ب)
$$-\frac{۱}{۲}=\frac{y-x}{x}=\frac{y-۱۰۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰۰}\rightarrow y=۵۰۰۰۰$$

پ)
$$-\frac{۱}{۲}=\frac{y-x}{x}=\frac{۱۰۰۰۰۰-x}{x}\rightarrow x=۲۰۰۰۰۰$$

۳) قیمت ۴ نوع کالای الف و ب و پ و ت در سال جاری نسبت به سال گذشته طبق جدول زیر تغییر داشته است.
الف) جدول را تکمیل کنید.
ب) این چهار کالا را در یک سبد به نام سبد کالا در نظر بگیرید. درصد تغییر قیمت این سبد کالا چقدر است؟

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
الف	۱۰۰۰۰۰	۱۱۵۰۰۰	
ب		۱۵۰۰۰۰	۲۰٪
پ	۱۵۰۰۰۰		۱۰٪
ت	۲۰۰۰۰۰		[illegible]

نوع کالا	قیمت سال گذشته	قیمت امسال	درصد تغییر
الف	۱۰۰۰۰۰	۱۱۵۰۰۰	۱۵٪
ب	۱۲۵۰۰۰	۱۵۰۰۰۰	۲۰٪
پ	۱۵۰۰۰۰	۱۶۵۰۰۰	۱۰٪
ت	۲۰۰۰۰۰	۱۸۰۰۰۰	۱۰ ٪
کل	۵۵۰۰۰۰	۵۸۰۰۰۰	۵/۴۵٪

۴) طول هر ضلع یک مکعب بر اثر گرما ۰/۱ واحد افزایش یافته است. اگر طول ضلع اولیهٔ این مکعب ۱ واحد باشد، درصد تغییر حجم مکعب را حساب کنید.

توضیح:

در این مسئله می‌خواهیم با مشخص بودن تغییرات طول ضلع مکعب، تغییرات حجم را به‌صورت درصد تغییر بیان کنیم.

$\frac{(۱/۱)^۳ - ۱^۳}{۱^۳} = ۰/۳۳۱$ یعنی ۳۳/۱ درصد (۱۰۰ × ۰/۳۳۱) افزایش داشته است.

فصل ۳

معادلهٔ درجهٔ دوم

فعالیت ۱

۱) با استفاده از رابطهٔ $x = 640000 - 3200p$، مقدار p را بر حسب x به دست آورید.

۲) درآمد حاصل از فروش x کالا با قیمت p را با R نشان دهید و معادلهٔ درآمد را تشکیل دهید.

۳) معادلهٔ درآمد را بر حسب x بنویسید.

۴) چند جمله‌ای درآمد بر حسب x از درجهٔ چند است؟

۵) اگر درآمد حاصل از فروش، ماهیانه سه میلیون تومان باشد، چه معادله‌ای برای x به‌دست می‌آید؟

۱ $p=\frac{60000-x}{300}$

۲ $R = p.x$

۳ $R=(\frac{60000-x}{300})x=\frac{60000x-x^2}{300}$

۴ از درجهٔ ۲ است.

۵ $\frac{60000x-x^2}{300}=3000000 \Rightarrow x^2-60000x+900000000=0$

در ادامه تعریف معادله‌های درجهٔ دوم ارائه شده است و مثال‌هایی از آن در زمینهٔ ریاضی و زمینهٔ واقعی آمده است.

کار در کلاس

در مثال ۲، از معادلهٔ $2(x+y)=100$، مقدار x را بر حسب y حساب کنید و معادله‌ای بر حسب y بنویسید. معادلهٔ به دست آمده بر حسب x و معادلهٔ بر حسب y چه شباهتی با هم دارند؟

$$2(x+y)=100 \Rightarrow x+y=50 \Rightarrow x=50-y$$
$$xy=600 \Rightarrow (50-y)y=600 \Rightarrow y^2-50y+600=0$$

متوجه می‌شویم که ضرایب عددی معادلهٔ درجهٔ دوم پدید آمده در مثال ۲ با کار در کلاس یکسان است و فقط نام متغیر عوض می‌شود. آیا می‌توانید دلیل این یکسانی دو معادله را توضیح دهید؟

فعالیت ۲

رابطهٔ طول ضلع یک مربع با محیط آن و رابطهٔ طول ضلع یک مربع با مساحت آن را در نظر بگیرید. طول ضلع مربع را با x، محیط آن را با P و مساحت آن را با S نشان دهید.

۱) رابطهٔ P و x و همچنین رابطهٔ S و x را با دو معادله بنویسید.

۲) جدول زیر را کامل کنید.

x (طول ضلع مربع)	۱	۲	۳	۴	۵
P (محیط مربع)	...	...	...	...	...
S (مساحت مربع)	...	...	...	...	...

۳) نقاط به دست آمده در جدول را در دو دستگاه محورهای مختصات زیر نشان دهید.

شکل (۱)

شکل (۲)

۴) جدولی رسم کنید که میزان افزایش محیط و مساحت مربع را وقتی طول ضلع آن از ۱ به ۲، از ۲ به ۳ و از ۴ به ۵ افزایش می‌یابد، نشان دهد.

۵) آیا نسبت افزایش محیط مربع به افزایش طول ضلع آن، مقدار ثابتی است؟

۶) آیا نسبت افزایش مساحت مربع به افزایش طول ضلع آن، مقدار ثابتی است؟

۷) می‌خواهیم نقاط شکل (۱) را به هم وصل کنیم؛ آیا می‌توانیم با یک خط راست همهٔ این نقاط را به هم وصل کنیم؟ چرا؟

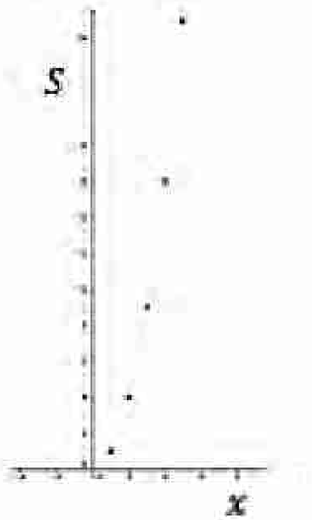
۸) می‌خواهیم نقاط شکل (۲) را به هم وصل کنیم؛ آیا می‌توانیم با یک خط راست همهٔ این نقاط را به هم وصل کنیم؟ چرا؟

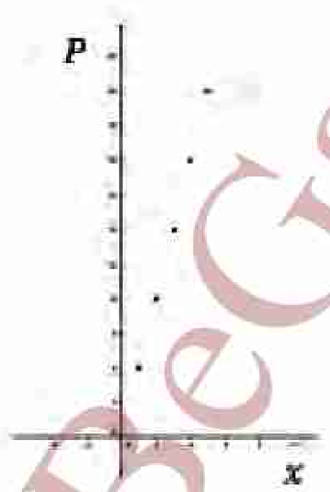
۱ $S = x^2$ مساحت و $P = 4x$ محیط

۲

x(طول ضلع مربع)	۱	۲	۳	۴	۵
P (محیط مربع)	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰
S (مساحت مربع)	۱	۴	۹	۱۶	۲۵

۳





۴

x(طول ضلع مربع)	از ۱ به ۲	از ۲ به ۳	از ۳ به ۴	از ۴ به ۵
میزان افزایش محیط	۴	۴	۴	۴
میزان افزایش مساحت	۳	۵	۷	۹

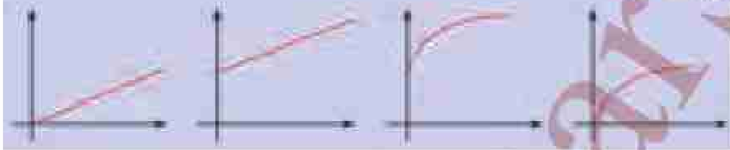
۵ بله، به ازای هر ۱ واحد افزایش طول ضلع ۴ واحد محیط اضافه می‌شود.

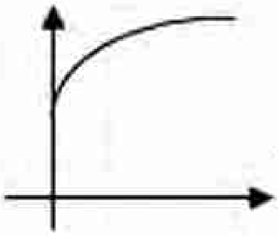
۶ خیر، به ازای ۱ واحد افزایش طول ضلع افزایش مساحت ثابت نیست و بستگی به مقدار طول ضلع دارد.

۷ بله، زیرا میزان افزایش محیط یکسان است.

۸ خیر، زیرا میزان افزایش مساحت یکسان نیست.

در شکل زیر، محور افقی نشان‌دهندهٔ زمان بر حسب ماه و محور عمودی نشان‌دهندهٔ وزن یک انسان بر حسب کیلوگرم است. کدام یک از نمودارهای زیر می‌تواند نمودار وزن یک انسان در طول زمان باشد؟





رابطهٔ وزن انسان و زمان خطی نیست، پس دو نمودار سمت چپ جواب نیست. در هنگام تولد وزن انسان صفر نیست، پس نمودار سمت راست هم جواب نیست. نمودار روبه رو جواب مسئله است زیرا میزان تغییرات وزن انسان نسبت به تغییرات زمان ثابت نیست و در ابتدای تولد نیز انسان مقداری وزن دارد.

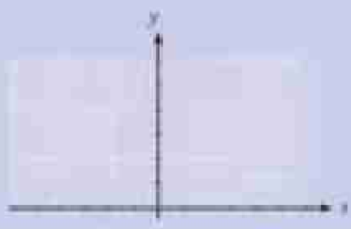
یک عدد حقیقی و مجذور آن را در نظر بگیرید. عدد حقیقی دلخواه را با x و مجذور آن (x^2) را با y نشان دهید.

۱) رابطهٔ بین x و y را با یک معادله نشان دهید.

۲) جدول زیر را کامل کنید (برای محاسبه می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

x	-۲	-۱/۸	-۱/۶	-۱/۴	-۱/۲	-۱	۰	۱	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲
y									۱/۴۴				

۳) نقاط جدول صفحهٔ قبل را روی محورهای مختصات زیر نشان دهید و نمودار رابطهٔ $y=x^2$ را رسم کنید.



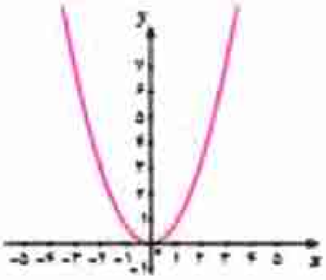
تعمیق درک روابط غیرخطی، تقویت مهارت رسم نمودار $y = x^2$، تقویت مهارت کار با ماشین‌حساب

۱ $y = x^2$

۲

x	۲	۱/۸	۱/۶	۱/۴	۱/۲	۱	۰	۱	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲
y	۴	۳/۲۴	۲/۵۶	۱/۹۶	۱/۴۴	۱	۰	۱	۱/۴۴	۱/۹۶	۲/۵۶	۳/۲۴	۴

۳ این نقاط را در محورهای مشخص شده نمایش دهید و آنها را به هم وصل کنید و شکل دقیق‌تر را با استفاده از جئوجبرا رسم کنید.



هزینهٔ ثابت ماهیانهٔ یک کارگاه تولید سیم برق، ۱۲۴۰۰۰۰ تومان است. هزینهٔ تهیهٔ مواد اولیه برای هر متر سیم ۲۴۰ تومان و قیمت فروش هر متر سیم ۴۰۰ تومان است.

۱) با توجه به این اطلاعات، جدول را کامل کنید.

طول سیم‌های فروخته شده (متر)	۰	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰
هزینهٔ تولید (تومان)							
درآمد حاصل از فروش (تومان)							

۲) اگر x طول سیم‌های فروخته شده، C هزینهٔ تولید و R درآمد حاصل از فروش سیم در یک ماه باشند، رابطهٔ بین طول سیم‌های فروخته شده و هزینه و همچنین، رابطهٔ بین طول سیم‌های فروخته شده و درآمد حاصل از فروش را بنویسید.

۳) در دستگاه مختصات زیر، اگر محور افقی، طول سیم‌های فروخته شده بر حسب متر و محور عمودی هزینهٔ تولید (برای رسم نمودار هزینه) و درآمد حاصل از فروش (برای رسم نمودار درآمد) بر حسب تومان در یک ماه در نظر گرفته شود، رابطه‌های بالا را در این دستگاه مختصات رسم کنید (هر واحد محور افقی را ۱۰۰ متر و هر واحد محور عمودی را ۱۰۰ هزار تومان در نظر بگیرید).

۴) مختصات نقطهٔ برخورد دو خط را بیابید.

۵) نقطهٔ تقاطع این دو خط چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۶) اگر مختصات نقطه‌ای در هر دو معادله صدق کند، این نقطه در کجا قرار دارد؟

۱

طول سیم‌های فروخته شده (متر)	۰	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰
هزینهٔ تولید (تومان)	۱۷۰۰۰۰	۱۷۶۰۰۰	۱۸۲۰۰۰	۱۸۸۰۰۰	۱۹۴۰۰۰	۲۰۰۰۰۰	۲۰۶۰۰۰
درآمد حاصل از فروش (تومان)	۰	۴۰۰۰۰	۸۰۰۰۰	۱۲۰۰۰۰	۱۶۰۰۰۰	۲۰۰۰۰۰	۲۴۰۰۰۰

۲ هزینهٔ تولید x کالا برای فروش $= C = y_1 = 170000 + 60x$

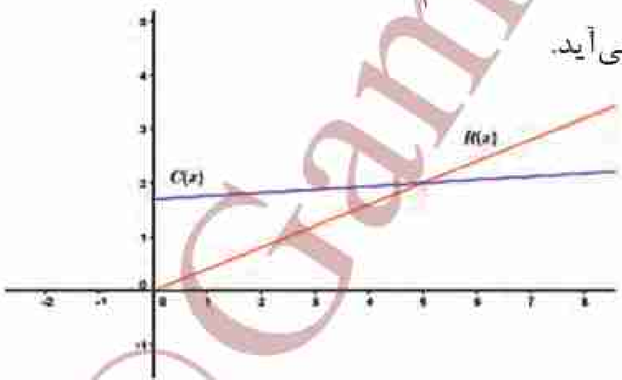
درآمد حاصل از فروش x کالا $= R = y_2 = 400x$

۳ برای آنکه محورهای مختصات را با واحدهای جدید در نظر بگیریم، از آنجا که y بر حسب تومان است و می‌خواهیم Y جدید بر حسب ۱۰۰۰۰۰ تومان باشد، داریم: $y = 100000Y$ و چون x بر حسب متر است و می‌خواهیم x جدید برحسب ۱۰۰ متر باشد داریم $x = 100X$. با جایگذاری در رابطه‌های به دست آمده نتیجه می‌شود:

$$100000Y_1 = 170000 + 60 \times 100X \Rightarrow Y_1 = 1/7 + 0/06X$$

$$100000Y_2 = 400 \times 100X \Rightarrow Y_2 = 0/4X$$

با رسم نمودار این دو خط، شکل زیر به دست می‌آید.



۴ با استفاده از شکل می‌توان دید، مختصات نقطهٔ برخورد $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ است. در واحدهای اصلی، این مختصات به معنای ۵۰۰ کالا و قیمت ۲۰۰۰۰۰ تومان است.

۵ یعنی با تولید تعداد ۵۰۰ کالا هزینهٔ تولید و درآمد حاصل از فروش یکسان می‌شود ولی

بعد از آن چون نمودار درآمد بالای نمودار هزینه قرار می‌گیرد کارگاه شروع به سوددهی می‌کند یعنی حداقل ۵۰۰ کالا باید تولید شود تا ضرر نکند.

۶ چنین نقطه‌ای روی نمودار هر دو خط‌است، یعنی نقطهٔ برخورد این دو خط است.

با این فعالیت مفهوم نقطهٔ برخورد و اهمیت آن ذکر می‌شود.

نکته: دبیران محترم بیان کنند که نتیجهٔ این فعالیت دو طرفه است یعنی اگر مختصات نقطه‌ای در معادلهٔ هر دو خط صدق کند آن نقطه همان نقطهٔ برخورد یا نقطهٔ تلاقی نمودارهای دو خط است و بر عکس مختصات نقطهٔ برخورد دو خط، در معادلهٔ دو خط صدق می‌کند.

با قرارگرفتن هنرجو در یک وضعیت مسئله‌گونهٔ دیگر از زندگی روزمره، آنها را در درک مفهوم نقطهٔ برخورد ارزیابی می‌کنیم:

کار در کلاس ۲

یک کارگاه تولید میز تحریر در هر ماه برای پرداخت مخارج دستگاههایش، سیصد و بیست هزار تومان هزینه می‌کند. هزینهٔ مواد اولیه برای هر میز ۴۰,۰۰۰ تومان و قیمت فروش هر میز ۶۰,۰۰۰ تومان است.

۱) جدول زیر را کامل کنید.

تعداد میزهای تولید شده در یک ماه	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
هزینهٔ تولید (بر حسب هزار تومان)					
درآمد حاصل از فروش (بر حسب هزار تومان)					

۲) اگر در یک ماه، تعداد میزهای تولید شده x، هزینهٔ تولید C و درآمد حاصل از فروش R در نظر گرفته شود، رابطهٔ بین تعداد میزها و هزینهٔ تولید و همچنین رابطهٔ بین تعداد میزها و درآمد حاصل از فروش در یک ماه را بنویسید.

۳) در دستگاه مختصات زیر اگر محور افقی، تعداد میزهای تولید شده و محور عمودی، هزینهٔ تولید (برای رسم نمودار هزینه) و درآمد حاصل از فروش (برای رسم نمودار درآمد) بر حسب صد هزار تومان در یک ماه باشد، رابطه‌های بالا را در این دستگاه مختصات رسم کنید.

۴) مختصات نقطهٔ برخورد دو خط بالا را بیابید.

۵) نقطهٔ تقاطع دو خط چه چیزی را نشان می‌دهد؟

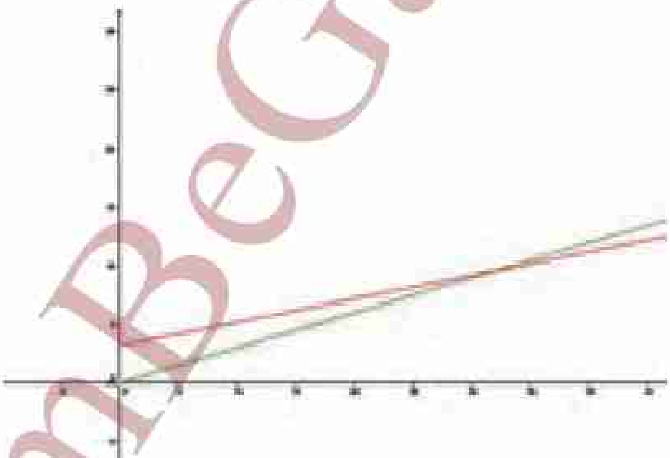
۱ قیمت‌ها و هزینه‌ها را بر حسب هزار تومان می‌نویسیم.

تعداد میزهای تولید شده در یک ماه	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰
هزینهٔ تولید (بر حسب هزار تومان)	۳۲۰	۵۲۰	۷۲۰	۹۲۰	۱۱۲۰
درآمد حاصل از فروش (بر حسب هزار تومان)	۰	۳۰۰	۶۰۰	۹۰۰	۱۲۰۰

۲ R = ۳۰۰۰۰x , C = ۳۲۰۰۰۰+۲۰۰۰۰x

۳ با تغییر واحد قیمت بر حسب صدهزارتومان رابطه‌های بالا به صورت زیر در می‌آیند.

R = ۰/۳x , C = ۳/۲+۰/۲x



البته در نمودار واقعی نقطه‌ها جدا از هم هستند.

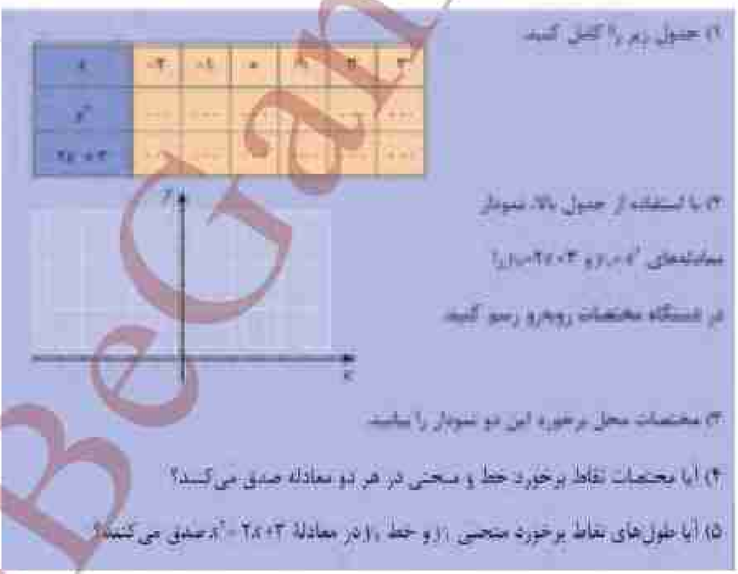
۴ از روی شکل نقطه برخورد با تبدیل واحدها به ازای $\begin{bmatrix} ۳۲ \\ ۹۶۰۰۰۰ \end{bmatrix}$ می‌دهد که به معنی ۳۲ میز و ۹۶۰ هزار تومان است که با حل معادلهٔ زیر نیز همین جواب به‌دست می‌آید.

$۳۲۰ + ۲۰x = ۳۰x \Rightarrow ۱۰x = ۳۲۰$

$x = ۳۲ \Rightarrow R = ۳۰ \times ۳۲ = ۹۶۰$

۵ یعنی با تولید ۳۲ میز هزینهٔ کارگاه و درآمد حاصل از فروش این تعداد میز یکسان است و بعد از آن سوددهی شروع می‌شود.

فعالیت ۲


۱) جدول زیر را کامل کنید.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
x^2	...	...	...	...	...	...
$2x+3$	...	...	...	...	...	...

۲) با استفاده از جدول بالا، نمودار معادله‌های $y=x^2$ و $y=2x+3$ را در دستگاه مختصات روبه‌رو رسم کنید.

۳) مختصات محل برخورد این دو نمودار را بیابید.

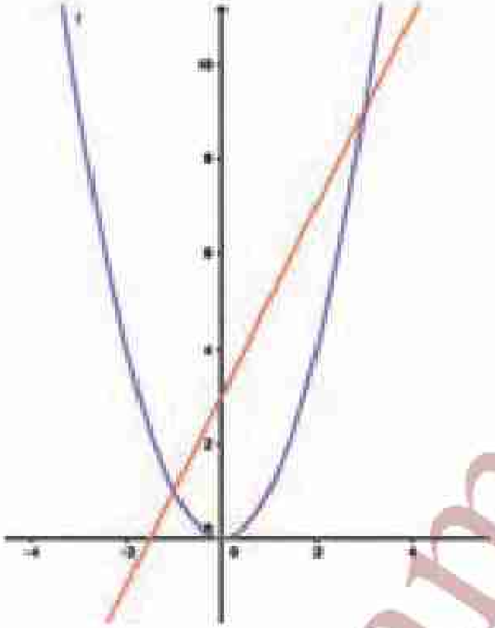
۴) آیا مختصات نقاط برخورد خط و منحنی در هر دو معادله صدق می‌کنند؟

۵) آیا طول‌های نقاط برخورد منحنی و خط، در معادلهٔ $x^2=2x+3$ صدق می‌کنند؟

۱

x	۲	۱	۰	۱	۲	۳
x^2	۴	۱	۰	۱	۴	۹
$2x+3$	۱	۱	۳	۵	۷	۹

۲



۳ از روی شکل دو نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۹ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ نقاط برخورد این دو نمودار هستند.

۴ بله، زیرا $(۳)^۲ = ۲(۳) + ۳$ و $(-۱)^۲ = ۲(-۱) + ۳$

۵ بله
$$\begin{cases} (۳)^۲ = ۲(۳) + ۳ \Rightarrow ۹ = ۹ \\ (-۱)^۲ = ۲(-۱) + ۳ \Rightarrow ۱ = ۱ \end{cases}$$

در انتهای این فعالیت باید نتیجه‌گیری شود که جواب‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم به صورت $x^۲ = ax + b$ را می‌توان با یافتن طول نقطه‌های برخورد نمودار خط $y = ax + b$ و منحنی $y = x^۲$ پیدا کرد.

این روش همان روش هندسی حل معادلهٔ درجهٔ دوم می‌باشد به این صورت که برای حل معادلهٔ $x^۲ - ۲x - ۳ = ۰$ ابتدا جمله $x^۲$ را در یک طرف و بقیه را به طرف دیگر می بریم، سپس نمودار رابطه‌های $y_۱ = ۲x + ۳$ و $y_۲ = x^۲$ را رسم می کنیم. برای یافتن جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ - ۲x - ۳ = ۰$ می توان طول نقطه‌های برخورد دو نمودار رابطه‌های بالا را در صورت امکان به‌دست آورد.

در سه مثال بعد انواع حالات ممکن معادله‌های درجهٔ دوم از نظر تعداد جواب‌ها بررسی شده‌اند.

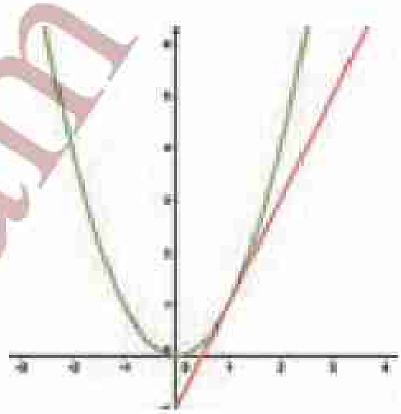
تعداد جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم (با توجه به معادله)، یکی یا دو تا یا هیچ می‌باشد.

معادله‌های زیر را با روش هندسی حل کنید (برای سهولت در رسم، از نرم افزار جئوجبرا کمک بگیرید)

الف) $x^2-2x+1=0$ ب) $x^2-1=0$ پ) $2x^2+x+1=0$

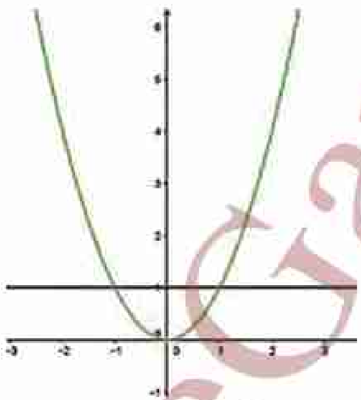
کسب مهارت به

(الف)



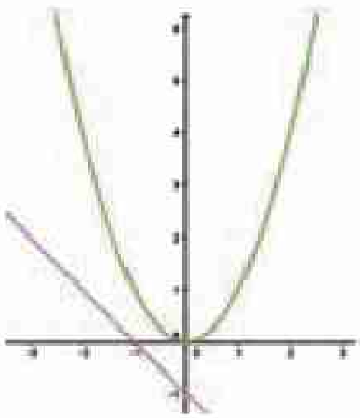
$x=1$ جواب معادله است

(ب)



$x=1$ و $x=-1$ جواب‌های معادله هستند

(پ)



جواب ندارد

۱) معادله‌های زیر را با روش هندسی حل کنید و جواب‌های آنها را به طور تقریبی به دست آورید.

الف) $2x^2-3x=5$

ب) $4x^2+8x=0$

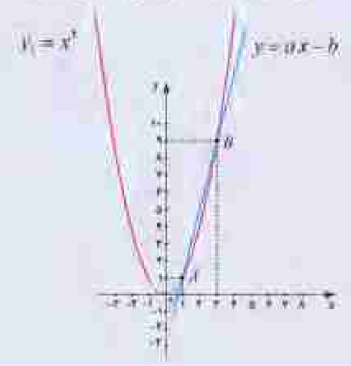
پ) $x^2+x=1$

ت) $x^2+4x=-4$

هر کدام از حالت‌های بالا را باید به‌صورت $x^2=ax+b$ در آورده و با رسم نمودارها، معادله را حل کنیم.

برای مثال حالت (الف) را به صورت $x^2=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$ و حالت (ب) را به صورت $x^2=-2x$ می‌نویسیم و مشابه کار در کلاس (۵) حل می‌کنیم.

۴) خط زیر به معادلهٔ $y=ax+b$ می‌باشد. مقادیر a و b را با توجه به شکل مشخص کنید. سپس معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که جواب‌های آن ۱ و ۳ باشد (راهنمایی: یک دستگاه دو معادله با دو مجهول بر حسب a و b تشکیل دهید یا ابتدا شیب این خط را بیابید).



در این مسئله می‌خواهیم ضرایب a و b را در معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2=ax+b$ طوری بیابیم که جواب‌های آن، طول نقطه‌های داده شده روی نمودار است. در این حالت معادله خط $y=ax+b$ را باید به صورتی به دست آوریم که نمودار $y=x^2$ را در نقطه‌هایی به طول‌های ۱ و ۳ قطع کند. مقادیر a و b را یافته سپس معادله $x^2=ax+b$ را می‌سازیم. این معادله همان معادلهٔ درجهٔ دوم موردنظر می‌باشد. برای یافتن a و b باید دو نقطهٔ $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix}$ روی این خط باشند، بنابراین داریم $1=a+b$ و $9=3a+b$. با حل این دستگاه نتیجه می‌شود $a=4$ و $b=-3$.

فعالیت ۵

معادلهٔ $x^2+6x-7=0$ را در نظر بگیرید.

۱) جمله‌هایی را که مجهول دارند، در یک طرف تساوی نگه دارید و جملهٔ ثابت را به طرف دیگر ببرید.

۳) عدد به‌دست آمده از مرحلهٔ (۲) را به دو طرف معادلهٔ مرحلهٔ (۱) اضافه کنید.

۴) طرف اول تساوی را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، به‌صورت مجذور یک عبارت بنویسید (یادآوری: اتحاد مربع دو جمله‌ای به‌صورت $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ است.)

۵) از دو طرف تساوی جذر بگیرید و دو جواب برای x به‌دست آورید.

۱ $x^2+6x=7$

۲ $\frac{6}{2}=3 \Rightarrow 3^2=9$

۳ $x^2+6x+9=7+9 \Rightarrow x^2+6x+9=16$

۴ $(x+3)^2=16$

۵ $|x+3|=4 \Rightarrow x+3=4$ یا $x+3=-4 \Rightarrow x=1$ یا $x=-7$

این فعالیت زمینه ساز یافتن فرمول کلی برای حل معادله‌های درجهٔ دوم به‌صورت جبری را فراهم می‌سازد.

کار در کلاس ۶

معادلهٔ $x^2-3x+2=0$ را مانند فعالیت ۵ حل کنید.

$$x^2-3x+2=0$$

$$x^2-3x=-2 \xrightarrow{\left(\frac{-3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}} x^2-3x+\frac{9}{4}=\frac{9}{4}-2 \Rightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$\rightarrow \left|x-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2} \Rightarrow x-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$ یا $x-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=1$ یا $x=2$

فعالیت ۲

معادلهٔ درجهٔ دوم دلخواه $ax^۲+bx+c=۰$ را در نظر بگیرید که در آن $a\neq ۰$.

۱) طرفین معادلهٔ بالا را بر عدد a تقسیم کنید و معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ضریب $x^۲$ در آن برابر ۱ باشد.

۲) جمله‌های دارای x را در یک طرف تساوی نگه دارید و جملهٔ ثابت را به طرف دیگر ببرید.

۳) در معادلهٔ بالا، نصف ضریب x را به‌دست آورید و آن را به توان ۲ برسانید.

۴) عدد به دست آمده از مرحلهٔ (۳) را به دو طرف معادلهٔ مرحلهٔ (۲) اضافه کنید.

۵) به کمک تساوی‌های بالا، جاهای خالی را پر کنید:

$$(x+\frac{b}{\quad})^۲=\frac{\quad-۴ac}{\quad}$$

۶) تساوی بالا در چه شرایطی امکان‌پذیر است؟ معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ در چه شرایطی جواب دارد؟

۷) نشان دهید در صورت مثبت بودن $b^۲-۴ac$ جواب‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ برابر جواب‌های دو معادلهٔ زیر است.

$$x+\frac{b}{۲a}=-\frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a} \quad , \quad x+\frac{b}{۲a}=\frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$$

۱ $$ax^۲+bx+c=۰\Rightarrow x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=۰$$

۲ $$x^۲+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

۳ $$\frac{\frac{b}{a}}{\frac{۲}{۱}}=\frac{b}{۲a}\Rightarrow\left(\frac{b}{۲a}\right)^۲=\frac{b^۲}{۴a^۲}$$

۴ $$x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{b^۲}{۴a^۲}=\frac{b^۲}{۴a^۲}-\frac{c}{a}$$

۵ $$(x+\frac{b}{۲a})^۲=\frac{b^۲-۴ac}{۴a^۲}$$

۶ چون سمت چپ این رابطه به توان دو است پس سمت راست باید عددی غیر منفی باشد.

یعنی باید $\frac{b^2-4ac}{4a^2}\geq 0$ و چون مخرج عددی همواره مثبت است پس $b^2-4ac\geq 0$ این معادله در صورتی جواب دارد که $b^2-4ac\geq 0$
بند (۷) حال اگر $b^2-4ac\geq 0$ می‌توان از طرفین رابطه به دست آمده در بند (۵) جذر گرفت؛ خواهیم داشت :

$$\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\Rightarrow x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x+\frac{b}{2a}=+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ یا } x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

و از آنجا خواهیم داشت :

$$x=\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\text{یا } x=\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

به کمک فعالیت ۶ روش جبری یا فرمول کلی برای یافتن جواب های هر معادلهٔ درجهٔ دوم، در صورت وجود، بیان می شود. در این فعالیت از $\Delta=b^2-4ac$ برای بررسی وجود جواب و تعداد جواب‌ها استفاده می‌شود.

کار در کلاس ۲

جواب‌های معادله‌های زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $5x^2+2x+1=0$ ب) $x^2-6=0$ پ) $x^2-3x=0$

حل قسمت الف) $5x^2+2x+1=0$

معادله جواب ندارد $\Leftarrow$ $\Delta=b^2-4ac=(2)^2-4(5)(1)=-16<0$

قسمت ب) $x^2-6=0$

$$\Delta=b^2-4ac=(0)^2-4(1)(-6)=24>0$$

$$\to x_1=\frac{-(0)-\sqrt{24}}{2}=-\sqrt{6} \text{ و } x_2=\frac{-(0)+\sqrt{24}}{2}=\sqrt{6}$$

قسمت پ)

$$x^{۲} - ۳x = ۰$$

$$\Delta = b^{۲} - ۴ac = (-۳)^{۲} - ۴(۱)(۰) = ۹ > ۰ \Rightarrow$$

$$x_{۱} = \frac{-(-۳) + \sqrt{۹}}{۲} = ۳ \text{ و } x_{۲} = \frac{-(-۳) - \sqrt{۹}}{۲} = ۰$$

۱) جواب‌های معادله‌های زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $۲x^{۲} + ۵x = ۰$

ب) $۳x^{۲} + ۱۳x + ۳ = ۰$

پ) $\sqrt{۲}x(x + \sqrt{۵}) = \sqrt{۸}$

ت) $x^{۲} + x + ۲ = ۰$

ث) $(۲x - ۱)^{۲} = ۵$

ج) $(x + ۲)^{۲} = -۴$

الف) حل به روش جبری (جواب‌ها $x = ۰$ و $x = \frac{-۵}{۲}$)

ب) حل به روش جبری (جواب‌ها $x_{۱} = \frac{-۱۳ + \sqrt{۱۳۳}}{۶}$ و $x_{۲} = \frac{-۱۳ - \sqrt{۱۳۳}}{۶}$)

پ) می‌توان طرفین را بر $\sqrt{۲}$ تقسیم نمود $\sqrt{۲}x(x + \sqrt{۵}) = \sqrt{۸}$

$$x(x + \sqrt{۵}) = ۲ \Rightarrow x^{۲} + \sqrt{۵}x - ۲ = ۰ \text{ و } \Delta = (\sqrt{۵})^{۲} - ۴(۱)(۲) = ۵ + ۸ = ۱۳$$

$$x_{۱} = \frac{-\sqrt{۵} + \sqrt{۱۳}}{۲} \text{ و } x_{۲} = \frac{-\sqrt{۵} - \sqrt{۱۳}}{۲}$$

هدف آموزشی این سؤال دیدن معادلهٔ درجهٔ دوم به شکلی دیگر و تشخیص همه ضرایب که بر $\sqrt{۲}$ بخش‌پذیرند و ساده‌نمودن ضرایب جهت محاسبات ساده‌تر و نهایتاً حل است.

ت) با یافتن $\Delta = -7$ و توجه به اینکه Δ منفی است معادله جواب ندارد.

ث) **روش اول :** سمت چپ را به توان ۲ می رسانیم

$$4x^2 + 1 - 4x = 5 \Rightarrow 4x^2 - 4x - 4 = 0 \xrightarrow{\text{همه جملات را بر ۴ تقسیم می‌کنیم}} x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5 \rightarrow x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

روش دوم : از طرفین جذر می‌گیریم

$$|2x-1| = \sqrt{5} \Rightarrow 2x-1 = \sqrt{5} \quad \text{یا} \quad 2x-1 = -\sqrt{5} \Rightarrow x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

ج) مثال چالش برانگیز: (این نوع مسائل ذهن هنرجو را پویا می‌کند)

چون سمت چپ معادله غیرمنفی و سمت راست معادله منفی است معادله جواب ندارد.

۲) اگر یکی از جواب‌های معادله $5x^2 + 13x + c = 0$ برابر (-3) باشد، جواب دیگر این معادله را بیابید.

می دانیم جواب معادله، تساوی رابطه را برقرار می‌کند پس:

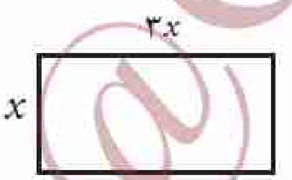
$$5(-3)^2 + 13(-3) + c = 0 \Rightarrow 45 - 39 + c = 0 \Rightarrow c = -6$$

پس معادلهٔ درجهٔ دوم به صورت $5x^2 + 13x - 6 = 0$ است.

$$\Delta = (13)^2 - 4(5)(-6) = 289 \Rightarrow x_1 = \frac{-13+\sqrt{289}}{10} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-13-\sqrt{289}}{10}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-13+17}{10} = \frac{2}{5} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-13-17}{10} = -3$$

۳) اگر طول مستطیلی سه برابر عرض آن باشد و مساحت آن ۳۰۰ مترمربع باشد، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟ این مسئله چند جواب دارد؟



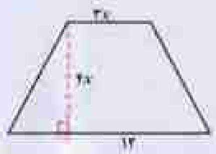
$$\text{مساحت} = x \times 3x = 3x^2 = 300 \Rightarrow 3x^2 - 300 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 100 = 0 \Rightarrow \Delta = (0)^2 - 4(1)(-100) = 400 > 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{400}}{2} = 10 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-\sqrt{400}}{2} = -10$$

جواب منفی قابل قبول نیست و مسئله فقط یک جواب دارد. مستطیل با عرض ۱۰ و طول ۳۰ جواب است.

۴) مساحت ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین مقابل، ۱۰۸ سانتی‌متر مربع است. مقدار x را پیدا کنید.



ابتدا با توجه به فرمول مساحت یک ذوزنقه داریم

$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{(3x+12)(4x)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(3x+12)(4x)}{2} = 108 \Rightarrow 12x^2 + 48x - 216 = 0 \Rightarrow$$

همه جمله‌ها را بر ۱۲ تقسیم می‌کنیم

$$x^2 + 4x - 18 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 + 72 = 88$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-4+\sqrt{88}}{2} \ \text{و}\ x_2 = \frac{-4-\sqrt{88}}{2}$$

$x_2 = -2-\sqrt{22}$ و $x_1 = -2+\sqrt{22}$ فقط جواب x_1 قابل قبول است که مثبت است زیرا طول نمی‌تواند منفی شود.

۵) حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی، ۱۳۲ می‌باشد. این دو عدد را پیدا کنید.

عدد کوچک‌تر را با x نشان می‌دهیم. عدد متوالی بعد از آن $x+1$ خواهد بود. بنابرفرض مسئله

$$x(x+1) = 132 \Rightarrow x^2 + x - 132 = 0 \xrightarrow{\Delta=(1)^2-4(1)(-132)=529}$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{529}}{2} = 11 \ \text{و}\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{529}}{2} = -12$$

هر دو جواب قابل قبول هستند. دو عدد متوالی ۱۱ و ۱۲ و دو عدد متوالی ۱۲- و ۱۱- هر دو جواب هستند.

۶) عددی طبیعی بیابید که دو برابر آن به اضافهٔ ۳۵، با مربع آن عدد مساوی باشد.

این عدد طبیعی را با n نشان می‌دهیم.

$$۲n+۳۵=n^{۲} \Rightarrow n^{۲}-۲n-۳۵=۰ \quad , \quad \Delta=(-۲)^{۲}-۴(۱)(-۳۵)=۴+۱۴۰=۱۴۴$$

$$\Rightarrow n=\frac{۲+۱۲}{۲}=۷ \quad و \quad n=\frac{۲-۱۲}{۲}=-۵$$

جواب منفی قابل قبول نیست زیرا عدد طبیعی مثبت است.

۷) نشان دهید $-۱+\sqrt{۲}$ یک جواب معادلهٔ $x^{۲}+۲x-۱=۰$ است.

می دانیم اگر عددی جواب یک معادله باشد باید با جایگذاری آن عدد به جای مجهول معادله، تساوی معادله برقرار شود. پس شرط جواب‌بودن را بررسی می‌کنیم.

$$(-۱+\sqrt{۲})^{۲}+۲(-۱+\sqrt{۲})-۱=۰ \Rightarrow$$

$$۱+۲-۲\sqrt{۲}-۲+۲\sqrt{۲}-۱=۰ \Rightarrow ۰=۰$$

چون این عدد تساوی را برقرار کرده است، یک جواب معادله است.

۸) مساحت ناحیهٔ خاکستری ۴۰ سانتی‌متر مربع است. اندازه هر ضلع مربع‌ها را بدست آورید.

مساحت مربع بزرگ‌تر $(۳y+۲)^{۲}$ و مساحت مربع کوچک‌تر $y^{۲}$ است. مساحت قسمت رنگی بین این دو مربع $(۳y+۲)^{۲}-y^{۲}$ است. با توجه به فرض مسئله: $(۳y+۲)^{۲}-y^{۲}=۴۰$. در این صورت:

$$۹y^{۲}+۴+۱۲y-y^{۲}-۴۰=۰ \Rightarrow ۸y^{۲}+۱۲y-۳۶=۰$$

طرفین را بر ۴ تقسیم می‌کنیم

$$۲y^۲+۳y-۹=۰ \xrightarrow{\Delta=۹+۷۲} y=\frac{-۳\pm ۹}{۴} \quad y_۱=-۳ \quad , \quad y_۲=\frac{۳}{۲}$$

اندازه ضلع مربع کوچک $= y=\frac{۳}{۲}$

اندازه ضلع مربع بزرگ $= ۳y+۲=۳\left(\frac{۳}{۲}\right)+۲=\frac{۱۳}{۲}$

و جواب منفی قابل قبول نیست.

۹) معمای زیر در کتاب «الجبر و المقابله» خوارزمی آمده است (گرفته شده از کتاب خوارزمی بنیانگذار جبر، کاروبا بریزنا)

"مقداری است که اگر یک سوم آن و یک درهم را در یک چهارم آن و یک درهم ضرب کنیم، حاصل آن بیست می‌شود."

این مقدار را پیدا کنید.

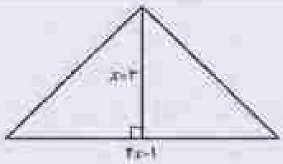
عدد را x فرض می‌کنیم.

$$\left(\frac{۱}{۳}x+۱\right)\left(\frac{۱}{۴}x+۱\right)=۲۰ \Rightarrow \frac{۱}{۱۲}x^۲+\frac{۷}{۱۲}x-۱۹=۰$$

طرفین را در ۱۲ ضرب می‌کنیم.

$$x^۲+۷x-۲۲۸=۰ \xrightarrow{\Delta=۹۶۱} x=\frac{-۷\pm ۳۱}{۲} \Rightarrow x_۱=-۱۹ \ , \ x_۲=۱۲$$

جواب منفی قابل قبول نیست، زیرا مقدار پول منفی نمی‌تواند باشد.



۱۰) مساحت مثلث روبه‌رو ۲۴ سانتی‌متر مربع است.

الف) مقدار x را پیدا کنید.

ب) اندازهٔ قاعده و ارتفاع مثلث چقدر است؟

الف)

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{۲}$$

$$۲۴=\frac{(۳x-۱)(x+۳)}{۲} \Rightarrow ۳x^۲+۸x-۵۱=۰$$

$$\Rightarrow x_۱=۳ \text{ و } x_۲=-\frac{۱۷}{۳}$$

جواب منفی قابل قبول نیست زیرا طول قاعده و ارتفاع منفی نمی‌تواند باشد.

ب) ارتفاع قاعده $= ۳x-۱=۳(۳)-۱=۸$

اندازه ارتفاع $= x+۳=۳+۳=۶$

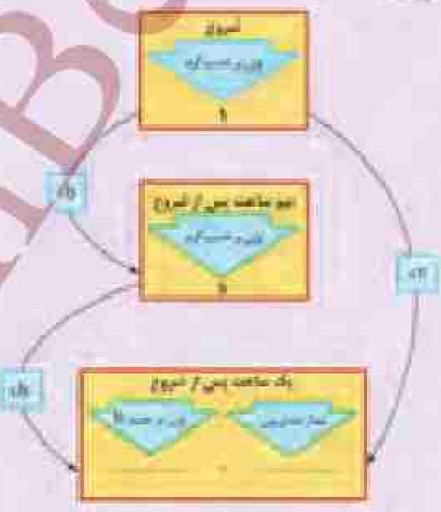
فصل ۴

توان‌رسانی به توان عددهای گویا

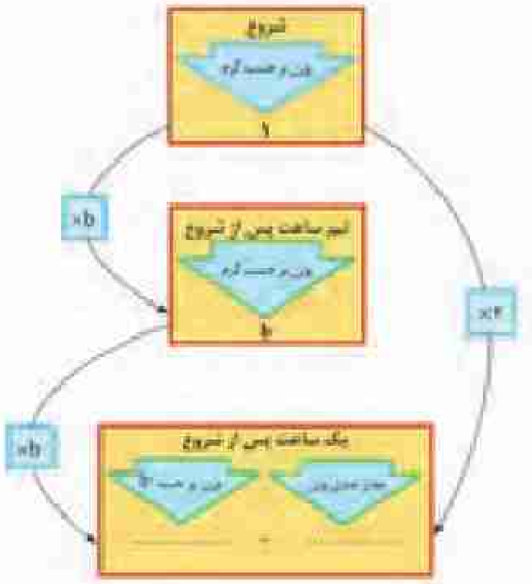
فعالیت ۱

نوعی باکتری را در نظر بگیرید که وزن آن هر ساعت دو برابر می‌شود. اگر در شروع ۱ گرم باکتری داشته باشیم، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱) اگر وزن باکتری‌ها پس از هر نیم‌ساعت h برابر شود وزن آنها را پس از یک ساعت بر حسب h به‌دست آورید و در محل تعیین شده بنویسید.



۲) وزن ۱ گرم باکتری را پس از یک ساعت برحسب گرم محاسبه کنید و در محل تعیین شده بنویسید. از تساوی حاصل مقدار h را به‌دست آورید.



۱ نمودار تکمیل شده :

۲ $b^{۲}=۲ \Rightarrow b=\sqrt{۲}$

کار در کلاس ۱

۱) ابتدا نمایش رادیکالی عددهای زیر را بنویسید سپس در صورت امکان، آنها را ساده کنید.

$۴۹^{\frac{۱}{۲}}=$

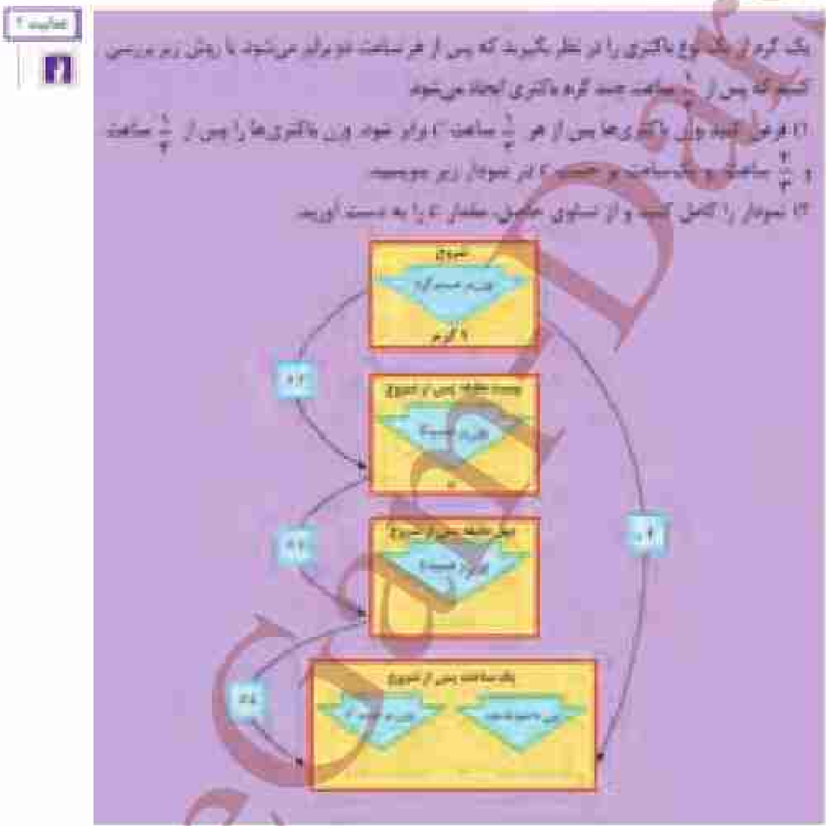
$(\frac{۱}{۲۵})^{\frac{۱}{۲}}=$

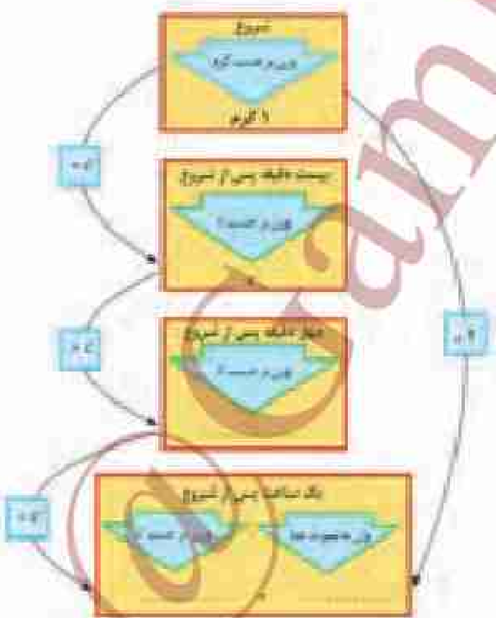
$(۰/۰۱)^{\frac{۱}{۲}}=$

۲) طول ضلع مربعی را که مساحت آن ۹ سانتی‌مترمربع است، به‌صورت یک عدد توان‌دار نمایش دهید و آن را ساده کنید.

۱ الف) $۴۹^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۴۹}=۷$ ب) $\left(\frac{۱}{۲۵}\right)^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{\frac{۱}{۲۵}}=\frac{۱}{۵}$ ج) $(۰/۰۱)^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۰/۰۱}=۰/۱$

۲ $S^{\frac{۱}{۲}}=۹^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۹}=۳$





۱ نمودار تکمیل شده :

۲ برای محاسبهٔ مقدار c داریم: $c^{۲} = ۲ \Rightarrow c = \sqrt[۲]{۲}$

در این فعالیت اگر هنرجویان آمادگی لازم را نداشته باشند، می‌توان در شروع باکتری‌هایی را که وزن آنها در

هر ساعت ۸ برابر می‌شود را در نظر گرفت و از هنرجویان خواست وزن آنها را پس از ۲۰ دقیقه و ۴۰ دقیقه حساب کنند و سپس به باکتری‌هایی که در کتاب مطرح شده رسید.

کار در کلاس ۲

۱) با توجه به تساوی‌های داده شده، ابتدا نمایش رادیکالی اعداد را بنویسید و سپس، حاصل را به‌دست آورید.

الف) $۶^۳ = ۲۱۶ \Rightarrow ۲۱۶^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[]{\quad} =$

ب) $(\frac{۱}{۷})^۳ = \frac{۱}{۳۴۳} \Rightarrow (\frac{۱}{۳۴۳})^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{\frac{\dots}{\dots}} = \dots$

۲) ابتدا نمایش رادیکالی عددهای زیر را بنویسید و سپس در صورت امکان، آنها را ساده کنید.

$۶۴^{\frac{۱}{۳}} =$ $\quad (۹^۳)^{\frac{۱}{۳}} =$ $\quad (\frac{۱}{۸})^{\frac{۱}{۳}} =$ $\quad (۰/۰۰۱)^{\frac{۱}{۳}} =$

۱

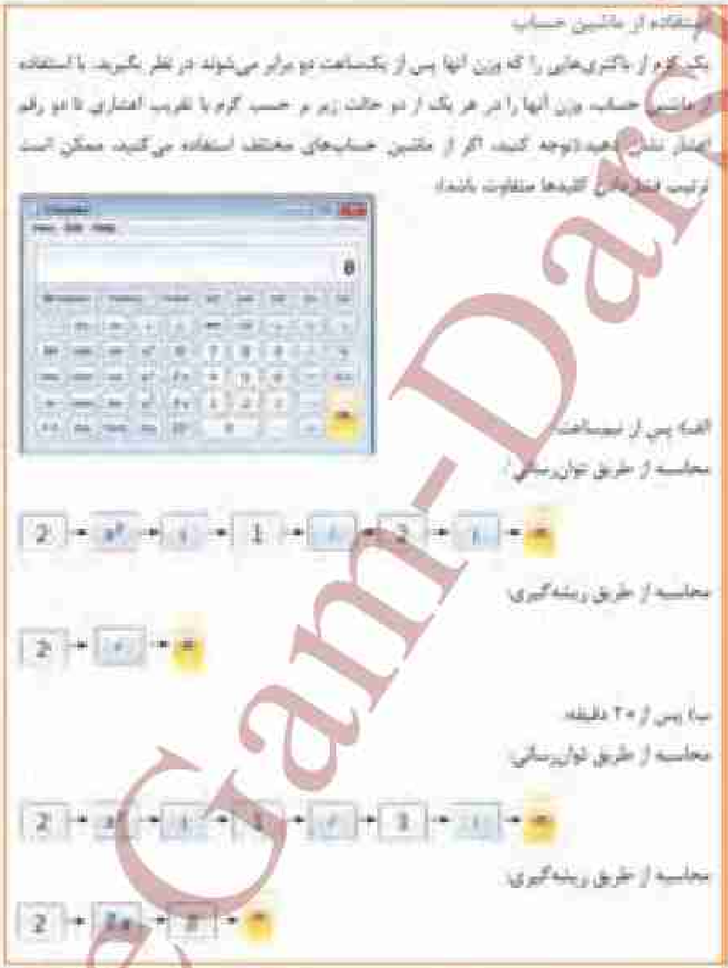
الف) $۲۱۶^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۲۱۶} = ۶$

ب) $\left(\frac{۱}{۳۴۳}\right)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{\frac{۱}{۳۴۳}} = \frac{۱}{۷}$

۲

$(۷۲۹)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۷۲۹} = ۹$ $\qquad ۶۴^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۶۴} = ۴$

$(۰/۰۰۱)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۰/۰۰۱} = ۰/۱$ $\qquad \left(\frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{\frac{۱}{۸}} = \frac{۱}{۲}$



استفاده از ماشین حساب

یک گرم از باکتری‌هایی را که وزن آنها پس از یکساعت دو برابر می‌شوند در نظر بگیرید. با استفاده از ماشین حساب وزن آنها را در هر یک از دو حالت زیر بر حسب گرم با تقریب اعشاری تا دو رقم اعشار نشان دهید. (توجه کنید اگر از ماشین حساب‌های مختلف استفاده می‌کنید ممکن است ترتیب فشار دادن کلیدها متفاوت باشد.)

الف) پس از نیم‌ساعت

محاسبه از طریق توان‌رسانی:

محاسبه از طریق ریشه‌گیری:

ب) پس از ۲۰ دقیقه

محاسبه از طریق توان‌رسانی:

محاسبه از طریق ریشه‌گیری:

استفاده از ابزار :

اهداف :

- آشنایی با تقریب اعشاریِ ریشه‌های دوم و سوم اعداد.
- آشنایی با تقریب اعشاریِ توان‌های $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ اعداد.
- استفاده از تقریب اعشاری برای مقایسهٔ نمایش یک عدد باتوان ($\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$) و نمایش رادیکالی آن اعداد.
- تقویت مهارت استفاده از ماشین‌حساب برای محاسبهٔ تقریب اعشاری ریشه‌های دوم و سوم و توان‌های $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ اعداد.
- تقویت مهارت قطع کردن تقریب اعشاری اعداد

$$\sqrt{۲} = ۱/۴۱ \quad \text{و} \quad ۲^{\frac{۱}{۲}} = ۱/۴۱ \quad \text{(الف}$$

$$\sqrt[۳]{۲} \approx ۱/۲۶ \quad \text{و} \quad ۲^{\frac{۱}{۳}} \approx ۱/۲۶ \quad \text{(ب}$$

مسئله‌ها

۱) نقطه چین‌ها را با عبارت مناسب تکمیل کنید.

$$۱۱^{۳} = ۱۳۳۱ \Rightarrow ۱۳۳۱^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{\quad} = $$

$$۱۷^{۲} = ۲۸۹ \Rightarrow ۲۸۹^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt[۲]{\quad} = $$

$$۱۱^{۳} = ۱۳۳۱ \Rightarrow (۱۳۳۱)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۱۳۳۱} = ۱۱$$

$$۱۷^{۲} = ۲۸۹ \Rightarrow (۲۸۹)^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt[۲]{۲۸۹} = ۱۷$$

۲) مقادیر خواسته شده را ابتدا به صورت یک عدد توان‌دار با توان گویا بنویسید و سپس عبارت رادیکالی معادل آن را بنویسید و با استفاده از ماشین حساب حاصل را تا دو رقم اعشار حساب کنید.

الف) مقدار x

ب) باکتری‌هایی را در نظر می‌گیرید که وزن آنها پس از یک ساعت دو برابر می‌شود. اگر با دو گرم باکتری شروع کنیم پس از نیم ساعت چقدر باکتری داریم؟ مقدار باکتری‌ها پس از بیست دقیقه چقدر است؟

پ) قطر یک مربع به ضلع ۳ را پیدا کنید.

الف) مقدار x :

$$x^{۲}=۶^{۲}-۳^{۲}=۲۷\rightarrow x=۲۷^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۲۷}\approx ۵/۲$$

ب) وزن باکتری‌ها پس از نیم ساعت:

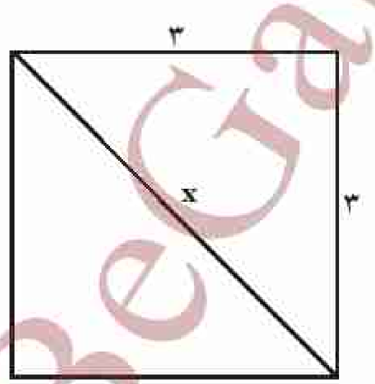
$$۴^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt[۲]{۴}=۲$$

وزن باکتری‌ها پس از بیست دقیقه :

$$۴^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۴}\approx ۱/۵۸$$

پ) قطر یک مربع به ضلع ۳ :

$$x^{۲}=۳^{۲}+۳^{۲}=۱۸\Rightarrow x=۱۸^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۱۸}\approx ۴/۲۴$$



۳) بخشی از راه حل احمد برای یافتن ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^{۲}-۳x-۲=۰$ به صورت زیر است:

$$x=\frac{۳\pm\left((-۳)^{۲}-۴\times۲\times(-۲)\right)^{\frac{۱}{۲}}}{۲\times۲}=\ldots$$

درستی یا نادرستی راه حل را بررسی کرده و در صورت درستی با ادامهٔ راه حل و درصورت نادرستی با نوشتن راه حل درست، ریشه‌های معادله را به‌دست آورید.

$$x=\frac{۳\pm ۲۵^{\frac{۱}{۲}}}{۴}=\frac{۳\pm ۵}{۴}=-\frac{۱}{۲}\,،\,۲$$

۴) دارایی‌های یک شرکت در هر سال، ۱۵۰ درصد سال قبل است. دارایی این شرکت طی ده سال به صورت زیر گزارش شده است:

بدو تأسیس: ۱ میلیارد ریال، پایان سال اول: ۱/۵ میلیارد ریال، پایان سال دوم: ۲/۲۵ میلیارد ریال و...

الف) دارایی شرکت در پایان سال‌های دوم، چهارم و دهم را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

ب) رابطه‌ای بنویسید که دارایی در پایان سال nاُم را به صورت یک عبارت توان‌دار بر حسب n نمایش دهد.

پ) اگر روند رشد دارایی‌ها در هر ماه نیز طبق رابطهٔ قسمت قبل باشد، دارایی شرکت را پس از ۴ ماه و ۶ ماه، به صورت یک عدد توان‌دار و یک عبارت رادیکالی نمایش دهید و با ماشین حساب مقدار آن را به صورت یک عدد اعشاری نمایش دهید.

چون دارایی ها در هر سال ۱۵۰ درصد سال قبل است بنابر این هر سال ۱/۵ برابر خواهد شد: (اعداد بر حسب میلیارد ریال می باشند)

الف) پایان سال اول: $۱/۵ \times ۱ = ۱/۵$ پایان سال دوم: $۱/۵ \times ۱/۵ = ۱/۵^{۲}$

پایان سال سوم: $۱/۵ \times ۱/۵^{۲} = ۱/۵^{۳}$ پایان سال چهارم: $۱/۵ \times ۱/۵^{۳} = ۱/۵^{۴}$

با توجه به رابطهٔ بین عدد سال و توان ۱/۵ می توان میزان دارایی در پایان سال دهم را به صورت زیر نوشت: پایان سال دهم: $۱/۵^{۱۰}$

ب) با تعمیم رابطهٔ قسمت قبل به سال nاُم داریم : پایان سال nاُم: $۱/۵^{n}$

پ) پایان ۴ ماه (معادل $\frac{۴}{۱۲}$ یا $\frac{۱}{۳}$ سال) $۱/۵^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۱/۵} \approx ۱/۱۴$

پایان ۶ ماه (معادل $\frac{۶}{۱۲}$ یا $\frac{۱}{۲}$ سال) $۱/۵^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۱/۵} \approx ۱/۲۲$

فعالیت

در هر قسمت، ابتدا جمله‌ها را کامل کنید، سپس به سؤال پاسخ دهید.

۱) یک ریشهٔ دوم عدد ۲۵ عدد ... است؛ زیرا $25 = (\ldots)^2$

۲) ریشه‌های دوم یک عدد را تعریف کنید.

۳) یک ریشهٔ سوم عدد ۸ عدد ... است؛ زیرا $8 = (\ldots)^3$

۴) ریشه‌های سوم یک عدد را تعریف کنید.

۵) برای ریشه‌های چهارم یک عدد چه تعریفی را پیشنهاد می‌کنید؟ از ریشهٔ چهارم مثالی بزنید.

۶) برای ریشه‌های پنجم یک عدد چه تعریفی را پیشنهاد می‌کنید؟ از ریشهٔ پنجم مثالی بزنید.

۷) برای ریشه‌های nاُم یک عدد چه تعریفی را پیشنهاد می‌کنید؟

۸) اگر $a = b^n$ آنگاه .... یک ریشهٔ .... عدد .... است.

۱ قسمت اول : ۵ یا ۵- قسمت دوم : $(-۵)^{۲}=۵^{۲}=۲۵$

۲ عدد b ریشهٔ دوم عدد a است هرگاه : $b^{۲}=a$

۳ قسمت اول : ۲ قسمت دوم : $۲^{۳}=۸$

۴ عدد b ریشهٔ سوم عدد a است هرگاه : $b^{۳}=a$

۵ عدد b ریشهٔ چهارم عدد a است هرگاه : $b^{۴}=a$ مثال از ریشهٔ چهارم: عدد ۳ ریشه چهارم ۸۱ است زیرا $۳^{۴}=۸۱$

۶ عدد b ریشهٔ پنجم عدد a است هرگاه : $b^{۵}=a$ مثال از ریشهٔ پنجم : عدد ۲ ریشهٔ پنجم ۳۲ است زیرا $۲^{۵}=۳۲$

۷ عدد b ریشهٔ kام عدد a است هرگاه : $b^{k}=a$

۸ عدد b یک ریشهٔ k ام عدد a است هرگاه $b^{k}=a$

کار در کلاس ۲

۱) به جای نقطه‌چین‌ها، عددهای مناسب قرار دهید.

الف) از آنجا که $۳^{۵}=۲۴۳$ ، عدد ...... یک ریشهٔ پنجم عدد ...... است.

ب) با توجه به تساوی ......$=(-۵)^{۶}$ عدد ...... یک ریشهٔ ششم عدد ...... است.

پ) تساوی $\frac{۱}{۸}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{...}$ نشان می‌دهد که عدد $\frac{۱}{۲}$ یک ریشهٔ ...... عدد ...... است.

۲) یک ریشهٔ چهارم از اعداد زیر را بنویسید.

الف) ۶۲۵ ب) $\frac{۱}{۸۱}$ ج) ۰/۰۰۰۱

۳) یک ریشهٔ پنجم از اعداد زیر را بنویسید.

الف) ۱ ب) $-\frac{۱}{۳۲}$ ج) ۳×۸۱

۴) برای پیدا کردن ریشه‌های چهارم و پنجم یک عدد، چه پیشنهادی دارید؟

الف) قسمت اول : ۳ قسمت دوم : ۲۴۳.

ب) قسمت اول : ۱۵۶۲۵ قسمت دوم : ۵ قسمت سوم : ۱۵۶۲۵

ج) تساوی $\frac{۱}{۸}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}$ نشان می‌دهد عدد $\frac{۱}{۲}$ ریشهٔ سوم عدد $\frac{۱}{۸}$ است.

۲ـ الف) ۵ یا ۵- ب) $\frac{۱}{۳}$ یا $-\frac{۱}{۳}$ ج) ۰/۱ یا ۰/۱-

۳ـ الف) ۱ ب) $-\frac{۱}{۲}$ ج) ۳

می‌توانند با ذکر مثال‌های بیشتر از اعداد اعشاری، کسری، صحیح یا اعداد توان‌دار درک بهتری از توان‌های کسری در هنرجویان به وجود آورند. البته لازم به ذکر است که عدد داده شده باید توان چهارم یا پنجمِ یک عدد آشنا باشد تا محاسبهٔ مقدار آن بدون استفاده از ماشین حساب امکان‌پذیر باشد.

۴ـ آنها را به عوامل اول تجزیه کرده و به صورت حاصل ضرب توان‌های اعداد اول می‌نویسیم. سپس با توجه به توان‌های آنها و تعریف ریشه، ریشهٔ چهارم و پنجم را به‌دست می‌آوریم. (نمونهٔ این روش با توجه به توانایی تجزیهٔ هنرجویان در این پایه و بر پایهٔ اطلاعات قبلی آنها، در قالب فعالیت و سؤال در کتاب کار آمده است.)

فعالیت ۹

۱) جدول زیر را کامل کنید.

عدد	...	...	۲	۱	$\frac{2}{3}$	.	$-\frac{2}{3}$	۱	۲
توان چهارم	...	...	...	...	...	...	$\frac{16}{81}$	...	...

۲) آیا در سطر دوم جدول، عدد منفی دیده می‌شود؟ چرا؟

۳) توان چهارم اعداد قرینه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۴) آیا یک عدد منفی می‌تواند ریشهٔ چهارم داشته باشد؟ چرا؟

۵) با استفاده از جدول، ریشه‌های چهارم اعداد ۱ و $\frac{16}{81}$ را بنویسید.

۶) با توجه به پاسخ‌های به دست آمده، در مورد تعداد ریشه‌های چهارم عدد مثبت a چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ این ریشه‌ها چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۷) آیا این نتیجه در مورد ریشه‌های زوج دیگر نیز درست است؟ با مثال نشان دهید.

۱ جدول کامل شده :

عدد	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1	2	...	...
توان چهارم	16	1	$\frac{16}{81}$	0	$\frac{16}{81}$	1	16	...	...

۲ خیر زیرا هر عددی (مثبت یا منفی) اگر به توان یک عدد زوج برسد علامت آن همواره مثبت است.

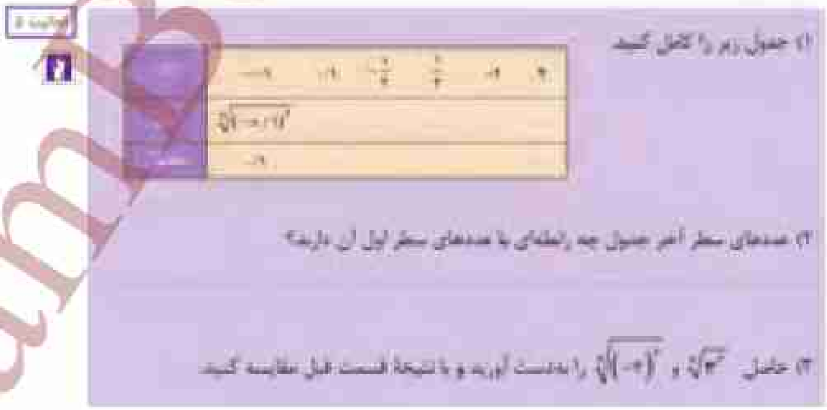
۳ با هم مساویند.

۴ خیر زیرا توان چهارم هیچ عددی منفی نیست.

۵ ریشه‌های چهارم ۱ عدد ۱ و ۱- است و ریشه‌های چهارم عدد $\frac{16}{81}$ اعداد $\frac{2}{3}$ و $-\frac{2}{3}$ هستند.

۶ عدد مثبتِ a دوریشهٔ چهارم دارد که قرینه هستند.

۷ بله مثلاً عدد ۶۴ دو ریشهٔ ششم دارد که عبارت‌اند از ۲ و ۲- زیرا $64 = 2^6 = (-2)^6$


۱) جدول زیر را کامل کنید.
۲) عددهای سطر آخر جدول چه رابطه‌ای با عددهای سطر اول آن دارند؟
۳) حاصل و را بدست آورید و با نتیجهٔ قسمت قبل مقایسه کنید.

۱

a	$-۰/۱$	$۰/۱$	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	-۲	۲
$\sqrt[۴]{a^۴}$	$\sqrt[۴]{(-۰/۱)^۴}$	$\sqrt{۰\ ۱}$	$\sqrt[۴]{\left(\frac{۱}{۲}\right)^۴}$	$\sqrt[۴]{\left(-\frac{۱}{۲}\right)^۴}$	$\sqrt[۴]{(-۲)^۴}$	$\sqrt[۴]{۲^۴}$
حاصل	$۰/۱$	$۰/۱$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۲	۲

۲ اعداد سطر آخر قدر مطلق اعداد سطر اول هستند.

۳ $\sqrt[۶]{(-۳)^۶}=\sqrt[۶]{۷۲۹}=۳$ و $\sqrt[۶]{۳^۶}=\sqrt[۶]{۷۲۹}=۳$ در این حالت نیز حاصل عدد مثبت ۳ است.

کار در کلاس ۴

۱) حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

الف) $\sqrt[۴]{۶۲۵}$ ب) $\sqrt[۶]{\frac{۱}{۶۴}}$ پ) $\sqrt[۶]{۰/۰۰۰۰۰۱}$ ت) $\sqrt[۶]{(-۰/۰۱)^۶}$

۲) ریشه‌های ششم اعداد زیر را بنویسید.

الف) $۵^۶$ ب) ۷۲۹ پ) ۱ ت) $(-۵)^۶$

۳) عبارت‌های $\sqrt[۶]{\left(-\frac{۵}{۳}\right)^۶}$ و $\sqrt[۴]{(۱-\sqrt{۳})^۴}$ را بدون استفاده از رادیکال بنویسید.

۱ الف) $\sqrt[۴]{۶۲۵} = ۵$ ب) $\sqrt[۶]{\frac{۱}{۶۴}} = \frac{۱}{۲}$

پ) $\sqrt[۶]{۰/۰۰۰۰۰۱} = ۰/۱$ ت) $\sqrt[۶]{(-۰/۰۱)^۶} = ۰/۱$

۲ الف) $\sqrt[۶]{۵^۶} = ۵$ ب) $\sqrt[۶]{۷۲۹} = ۳$

پ) $\sqrt[۶]{۱} = ۱$ ت) $\sqrt[۶]{(-۵)^۶} = ۵$

۳ $\sqrt[۶]{\left(-\frac{۵}{۳}\right)^۶} = \left|-\frac{۵}{۳}\right| = \frac{۵}{۳}$ و $\sqrt[۴]{(۱-\sqrt{۳})^۴} = |۱-\sqrt{۳}| = \sqrt{۳}-۱$

۱) جدول زیر را کامل کنید.

ریشه پنجم	۲	۱	$\frac{۱}{۴}$	۰	-۱	$-\frac{۱}{۴}$	-۲	عدد
عدد	...	...	$\frac{۱}{۱۰۲۴}$	...	...	...	...	توان پنجم

۲) آیا در سطر دوم جدول، عددی منفی دیده می‌شود؟ آیا می‌توان نتیجه گرفت که عددهای منفی ریشهٔ پنجم دارند؟

۳) توان پنجم عددهای قرینه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۱ جدول زیر را کامل کنید.

ریشه پنجم	۲	۱	$\frac{۱}{۴}$	۰	۱	$-\frac{۱}{۴}$	۲	عدد
عدد	۳۲	۱	$\frac{۱}{۱۰۲۴}$	۰	۱	$-\frac{۱}{۱۰۲۴}$	۳۲	توان پنجم

۲ **قسمت اول :** بله در سطر دوم جدول عدد منفی وجود دارد.
قسمت دوم : بله می‌توان نتیجه گرفت اعداد منفی ریشهٔ پنجم دارند.

۳ توان پنجم دو عدد قرینه، قرینهٔ هم هستند.

کار در کلاس

حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

الف) $\sqrt[۵]{۱۱^{۵}}$ ب) $\sqrt[۵]{\frac{۱}{۲۴۳}}$ پ) $\sqrt[۵]{-۰/۰۰۰۰۱}$ ت) $\sqrt[۷]{(-۳)^{۷}}$

الف) $\sqrt[۵]{۱۱^{۵}}=۱۱$ ب) $\sqrt[۵]{\frac{۱}{۲۴۳}}=\frac{۱}{۳}$

$\sqrt[۵]{-۰/۰۰۰۰۱}=-۰/۱$ ت) $\sqrt[۷]{(-۳)^{۷}}=-۳$

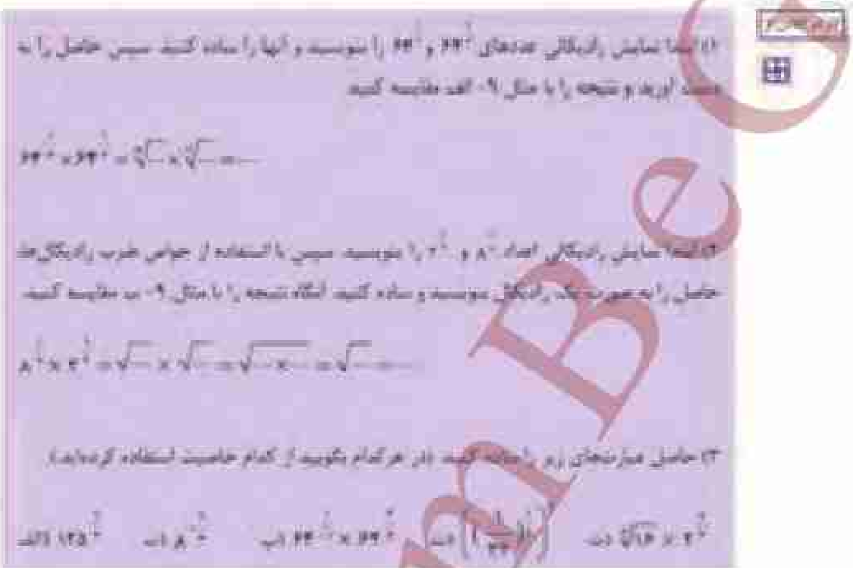
کار در کلاس

ابتدا نمایش رادیکالی عددهای زیر را نوشته و سپس در صورت امکان آنها را ساده کنید.

الف) $(۳^{۸})^{\frac{۱}{۸}}$ ب) $\left(\frac{۱}{۳۲}\right)^{\frac{۱}{۵}}$ پ) $(۰/۰۰۰۰۱)^{\frac{۱}{۵}}$ ت) $۲۴۳^{\frac{۱}{۵}}$

الف) $(۳^{۸})^{\frac{۱}{۸}}=\sqrt[۸]{۳^{۸}}=۳$ ب) $\left(\frac{۱}{۳۲}\right)^{\frac{۱}{۵}}=\sqrt[۵]{\frac{۱}{۳۲}}=\frac{۱}{۲}$

پ) $(۰/۰۰۰۰۱)^{\frac{۱}{۵}}=\sqrt[۵]{۰/۰۰۰۰۱}=۰/۱$ ت) $۲۴۳^{\frac{۱}{۵}}=\sqrt[۵]{۲۴۳}=۳$


۱) ابتدا نمایش رادیکالی عددهای $۶۴^{\frac{۱}{۳}}$ و $۶۴^{\frac{۱}{۲}}$ را بنویسید و آنها را ساده کنید سپس حاصل را به دست آورید و نتیجه را با مثال ۹- الف مقایسه کنید.

$۶۴^{\frac{۱}{۳}} \times ۶۴^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt[۳]{\dots} \times \sqrt[۲]{\dots} = \dots$

۲) ابتدا نمایش رادیکالی اعداد $۸^{\frac{۱}{۲}}$ و $۲^{\frac{۱}{۲}}$ را بنویسید. سپس با استفاده از خواص ضرب رادیکال‌ها حاصل را به صورت یک رادیکال بنویسید و ساده کنید. آنگاه نتیجه را با مثال ۹- ب مقایسه کنید.

$۸^{\frac{۱}{۲}} \times ۲^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{\dots} \times \sqrt{\dots} = \sqrt{\dots \times \dots} = \sqrt{\dots} = \dots$

۳) حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید (در هر کدام بگویید از کدام خاصیت استفاده کرده‌اید).

۱ همان‌طور که دیده می‌شود نتیجه با مثال ۹ـ الف مساوی است.

$$۶۴^{\frac{۱}{۳}} \times ۶۴^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt[۳]{۶۴} \times \sqrt[۲]{۶۴} = ۴ \times ۸ = ۳۲$$

۲ همان‌طور که دیده می‌شود نتیجه با مثال ۹ـ ب یکسان است.

$$۸^{\frac{۱}{۲}} \times ۲^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۸} \times \sqrt{۲} = \sqrt{۸ \times ۲} = \sqrt{۱۶} = ۴$$

۳ حاصل عبارات زیر را ساده کنید. (در هر کدام بگویید از کدام خاصیت استفاده کرده‌اید)

الف) $۱۲۵^{\frac{۲}{۳}} = \left(۱۲۵^{\frac{۱}{۳}}\right)^{۲} = (\sqrt[۳]{۱۲۵})^{۲} = ۵^{۲} = ۲۵$

خواص توان‌رسانی (خاصیت $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$)، نمایش رادیکالی یک عدد با توان گویا، محاسبهٔ ریشهٔ یک عدد

ب) $۸^{-\frac{۲}{۳}} = \left(۸^{\frac{۱}{۳}}\right)^{-۲} = (\sqrt[۳]{۸})^{-۲} = ۲^{-۲} = \frac{۱}{۲^{۲}} = \frac{۱}{۴}$

خواص توان‌رسانی (خاصیت $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$)، نمایش رادیکالی یک عدد با توان گویا، محاسبهٔ ریشهٔ یک عدد

پ) $۶۴^{\frac{۱}{۱۲}} \times ۶۴^{\frac{۳}{۴}} = ۶۴^{\frac{۱}{۱۲}+\frac{۳}{۴}} = ۶۴^{\frac{۱۰}{۱۲}} = ۶۴^{\frac{۵}{۶}} = \left(۶۴^{\frac{۱}{۶}}\right)^{۵} = (\sqrt[۶]{۶۴})^{۵} = ۲^{۵} = ۳۲$

خواص توان‌رسانی (خاصیت $a^m \times a^n = a^{m+n}$)، نمایش رادیکالی یک عدد با توان گویا، محاسبهٔ ریشهٔ یک عدد

ت) $\left(\left(\frac{۱}{۳۲}\right)^{\frac{۱}{۵}}\right)^{۳} = \left(\sqrt[۵]{\frac{۱}{۳۲}}\right)^{۳} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳} = \frac{۱}{۸}$

خواص توان‌رسانی (خاصیت $(a^m)^n = a^{mn}$)، نمایش رادیکالی یک عدد با توان گویا، محاسبهٔ ریشهٔ یک عدد

ث) $\sqrt[۳]{۱۶} \times ۲^{\frac{۲}{۳}} = ۱۶^{\frac{۱}{۳}} \times ۲^{\frac{۲}{۳}} = (۴^{۲})^{\frac{۱}{۳}} \times ۲^{\frac{۲}{۳}} = ۴^{\frac{۲}{۳}} \times ۲^{\frac{۲}{۳}} = ۸^{\frac{۲}{۳}} = \left(۸^{\frac{۱}{۳}}\right)^{۲} = (\sqrt[۳]{۸})^{۲} = ۲^{۲} = ۴$

برای رسیدن به پاسخ از نمایش رادیکالی یک عدد به نمایش آن عدد به‌صورت یک عدد توان‌دار، خواص توان‌رسانی (خاصیت $(a^m)^n = a^{mn}$ و $a^m \times b^m = (ab)^m$)، نمایش رادیکالی یک عدد با توان گویا، محاسبهٔ ریشهٔ یک عدد، استفاده شده است.

کار در کلاس ۸

در جدول زیر، برخی از توان‌های عدد $\frac{۱}{۴}$ را می‌بینید.

x	-۲	$-\frac{۳}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$
$(\frac{۱}{۴})^x$	۱۶			۲	۱			

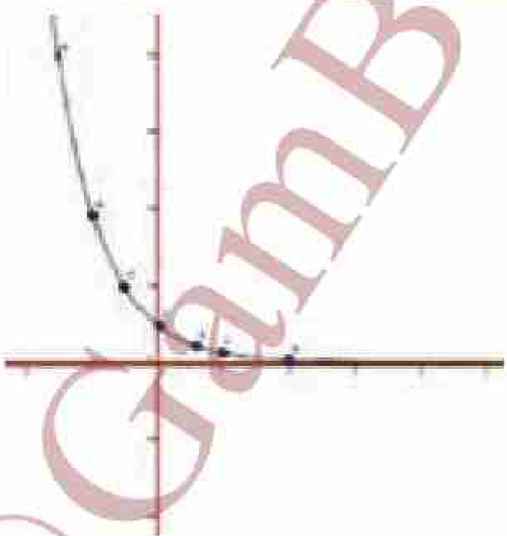
۱) جدول را کامل کنید.

۲) مقادیر x را روی محور xها و مقادیر $(\frac{۱}{۴})^x$ را روی محور yها مشخص کرده و این نقاط را به یکدیگر متصل کنید.

۳) آیا نمودار $(\frac{۱}{۴})^x$ یک خط راست است؟

x	-۲	$-\frac{۳}{۲}$	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$
$\left(\frac{۱}{۴}\right)^x$	۱۶	۸	۴	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$

۲



۲ خیر نمودار مربوط به یک خط راست نیست.

مسئله‌ها

۱) به جای نقطه‌چین‌ها عبارت مناسب قرار دهید.

الف) $۷^۲ = ۴۹ \Rightarrow (۴۹)^{\ldots} = \sqrt[\ldots]{\ldots} = \ldots$

$$۷^۲ = ۴۹ \Rightarrow (۴۹)^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt[۲]{۴۹} = ۷$$

ب) $۱۷^۳ = ۴۹۱۳ \Rightarrow ۴۹۱۳^{\ldots} = \sqrt[\ldots]{\ldots} = \ldots$

$$۱۷^۳ = ۴۹۱۳ \Rightarrow (۴۹۱۳)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۴۹۱۳} = ۱۷$$

پ) $۱۳^۴ = ۲۸۵۶۱ \Rightarrow ۲۸۵۶۱^{\ldots} = \sqrt[\ldots]{\ldots} = \ldots$

$$۱۳^۴ = ۲۸۵۶۱ \Rightarrow (۲۸۵۶۱)^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{۲۸۵۶۱} = ۱۳$$

ت) $۱۵^{-۴} = (\frac{۱}{۱۵})^۴ = \frac{۱}{۵۰۶۲۵} \Rightarrow (\frac{۱}{۵۰۶۲۵})^{\ldots} = \sqrt[\ldots]{\ldots} = \ldots$

$$۱۵^{-۴} = \frac{۱}{۵۰۶۲۵} \Rightarrow (\frac{۱}{۵۰۶۲۵})^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{\frac{۱}{۵۰۶۲۵}} = \frac{۱}{۱۵}$$

ث) $(\frac{۱}{۳})^۹ = \ldots \Rightarrow (\ldots)^{\ldots} = \sqrt[\ldots]{\ldots} = \ldots$

$$(\frac{۱}{۳})^۹ = \frac{۱}{۱۹۶۸۳} \Rightarrow (\frac{۱}{۱۹۶۸۳})^{\frac{۱}{۹}} = \sqrt[۹]{\frac{۱}{۱۹۶۸۳}} = \frac{۱}{۳}$$

ج) $۵^۶ = ۱۵۶۲۵ \Rightarrow (۱۵۶۲۵)^{\ldots} = \sqrt[\ldots]{۱۵۶۲۵} = \ldots$

$$۵^۶ = ۱۵۶۲۵ \Rightarrow (۱۵۶۲۵)^{\frac{۱}{۶}} = \sqrt[۶]{۱۵۶۲۵} = ۵$$

ج) $(0/3)^5 = 0/00243 \Rightarrow (0/00243)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{...} = ...$

$$(0/3)^5 = 0/00243 \Rightarrow (0/00243)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{0/00243} = 0/3$$

۴) در هر کدام از قسمت‌های زیر، مسئله‌ای در زمینهٔ بیان شده طرح کنید که جواب آن، عدد توان‌دار داده شده باشد.

الف) $4^{\frac{1}{4}}$: (تکثیر باکتری‌ها)

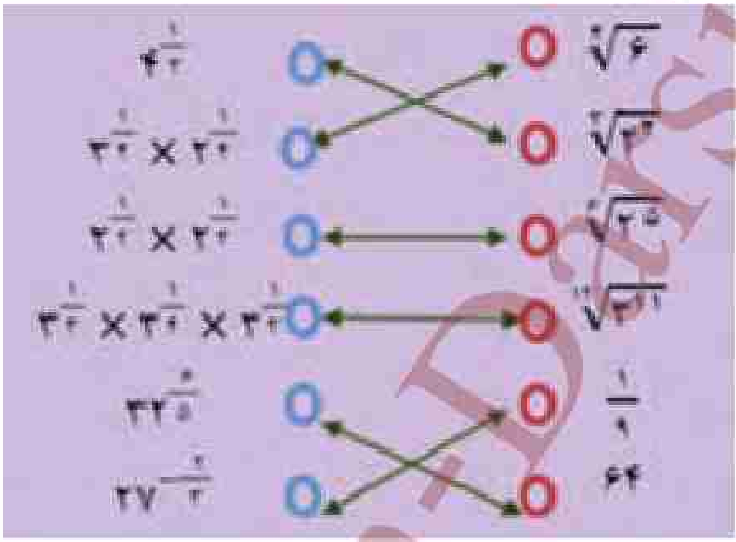
ب) $27^{\frac{1}{3}}$: (زمینهٔ هندسی)

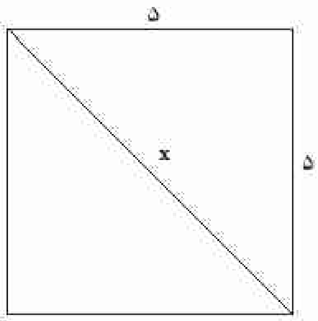
الف) $4^{\frac{1}{4}}$: (تکثیر باکتری‌ها) باکتری‌هایی را در نظر می‌گیریم که وزن آنها پس از یک ساعت ۴ برابر می‌شوند اگر با ۱ گرم باکتری شروع کنیم وزن آنها پس از ۱۵ دقیقه $4^{\frac{1}{4}}$ خواهد بود.

ب) $27^{\frac{1}{3}}$: (زمینه هندسی) طول ضلع مکعبی با حجم ۲۷ واحد مکعب.

۳) هریک از عددها را به عدد مساوی آن در ستون مقابل وصل کنید.

[illegible]





۴) پاسخ هر یک از پرسش‌های زیر را به دو صورت عدد توان‌دار و عبارت رادیکالی نمایش دهید و در صورت امکان، ساده کنید.

الف) قطر یک مربع به طول ضلع ۵ چقدر است؟

الف) قطر یک مربع به طول ضلع ۵ چقدر است؟

$$x^{۲} = ۵^{۲} + ۵^{۲} = ۵۰ \Rightarrow x = ۵۰^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۵۰} \simeq ۷/۰۷$$

ب) وزن ۱ گرم از نوعی باکتری در هر ساعت ۸ برابر می‌شود. وزن باکتری پس از ۲۰ دقیقه چقدر می‌شود؟

ب) وزن ۱ گرم از یک نوع باکتری که در هر ساعت ۸ برابر می‌شود. پس از گذشت ۲۰ دقیقه :

$$۸^{\frac{۲۰}{۶۰}} = ۸^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۸} = ۲$$

پ) طول ضلع مکعبی با حجم ۱۰۰۰ متر مکعب چقدر است؟

پ) طول ضلع مکعبی با حجم ۱۰۰۰ متر مکعب : $۱۰۰۰^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۱۰۰۰} = ۱۰$

ت) طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع ۶ و ۹ سانتی‌متر چقدر است؟

ت) طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع زاویهٔ قائمه ۶ و ۹ برابر است با:

$a^{۲} = ۶^{۲} + ۹^{۲} \Rightarrow a^{۲} = ۱۱۷ \quad \Rightarrow \quad a = \pm\sqrt{۱۱۷} \approx \pm۱۰/۸$ که فقط ۱۰/۸ قابل قبول است.

۵) ابتدا نمایش رادیکالی عبارت‌های زیر را بنویسید و سپس در صورت امکان آنها را ساده کنید.

الف) ریشه‌های دوم عدد ۱۲۱

ب) ریشهٔ پنجم عدد ۳۲

پ) ریشهٔ پنجم عدد ۳۲-

ت) ریشه‌های ششم عدد $\frac{۱}{۶۴}$

ث) توان $\frac{۱}{۳}$ عدد ۲۷

ج) توان $\frac{۱}{۵}$ عدد ۳۲

الف) $\pm\sqrt{۱۲۱}=\pm ۱۱$

ب) $\sqrt[۵]{۳۲}=۲$

پ) $\sqrt[۵]{-۳۲}=-۲$

ت) $\pm\sqrt[۶]{\frac{۱}{۶۴}}=\pm\frac{۱}{۲}$

$۲۷^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۲۷}=۳$

ج) $۳۲^{\frac{۱}{۵}}=\sqrt[۵]{۳۲}=۲$

۶) حاصل هر کدام از عبارت‌های زیر را ابتدا به صورت یک عدد توان‌دار و سپس، به صورت عبارت رادیکالی بنویسید و در صورت امکان ساده کنید.

الف) $۴^{\frac{۱}{۴}}\times ۴^{\frac{۱}{۳}}$

ب) $۶۴^{-\frac{۱}{۲}}\times ۶۴^{-\frac{۱}{۳}}$

پ) $(\frac{۱}{۸})^{\frac{۱}{۴}}\times(\frac{۱}{۸})^{\frac{۱}{۱۲}}$

ت) $۵^{[illegible]}\times ۲۵^{[illegible]}$

ث) $(۴^{[illegible]})^{[illegible]}$

ج) $(۳۲^{[illegible]})^{[illegible]}$

الف) $۴^{\frac{۱}{۴}}\times ۴^{\frac{۱}{۳}}=۴^{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}}=۴^{\frac{۷}{۱۲}}=\sqrt[۱۲]{۴^{۷}}=\sqrt[۱۲]{۱۶۳۸۴}$

ب) $۶۴^{-\frac{۱}{۲}}\times ۶۴^{-\frac{۱}{۳}}=۶۴^{-\frac{۱}{۲}+(-\frac{۱}{۳})}=۶۴^{-\frac{۵}{۶}}=\frac{۱}{۶۴^{\frac{۵}{۶}}}=\frac{۱}{\left(۶۴^{\frac{۱}{۶}}\right)^{۵}}=\frac{۱}{(\sqrt[۶]{۶۴})^{۵}}=\frac{۱}{۲^{۵}}=\frac{۱}{۳۲}$

پ) $\left(\frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۱}{۴}}\times\left(\frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۱}{۱۲}}=\left(\frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۲}}=\left(\frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۴}{۱۲}}=\left(\frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{\frac{۱}{۸}}=\frac{۱}{۲}$

ت) $5^{\frac{1}{3}} \times 25^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}} \times (5^{2})^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{3}{3}} = 5$

ث) $\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{2} = 3^{\frac{2}{3}} = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{2} = (\sqrt[3]{3})^{2} = \sqrt[3]{9}$

ج) $(27^{-2})^{\frac{1}{6}} = 27^{-\frac{2}{6}} = 27^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{27^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{1}{3}$

۷) عبارت‌های زیر را بدون استفاده از رادیکال بنویسید.

الف) $\sqrt[4]{(1-\sqrt{3})^{4}}$ ب) $\sqrt[3]{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{3}}$

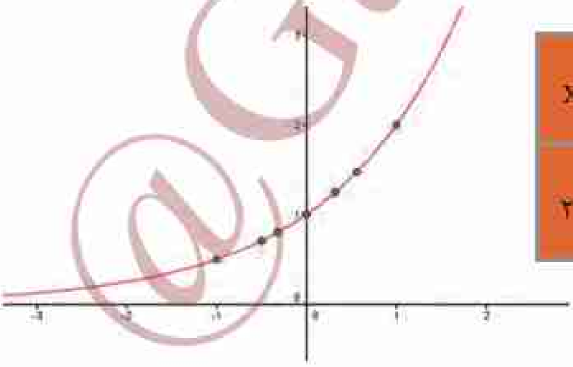
الف) $\sqrt[4]{(1-\sqrt{3})^{4}} = |1-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-1$ ب) $\sqrt[3]{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{3}} = \sqrt{2}-\sqrt{3}$

۸) با کامل کردن جدول زیر، نقاط آن را روی محورهای مختصات مشخص کنید و نقاط را به هم وصل کنید.
(برای محاسبهٔ توان‌های گویا می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید.)

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
2^x	...	...	...	...	...	...	

(برای محاسبهٔ توان‌های گویا می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید.)

x	۱	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	۱
2^x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	۱	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt{2}$	۲



۵

فصل

نسبت‌های مثلثاتی


فعالیت ۱

دو شکل مشابه روبه‌رو را در نظر بگیرید.

۱) نسبت اضلاع متناظر را بنویسید.

۲) هر یک از اضلاع ABCD چند برابر اضلاع متناظرش در WXYZ است؟

۳) هر یک از اضلاع WXYZ چند برابر اضلاع متناظرش در ABCD است؟

۴) نسبت اضلاع ABCD به WXYZ را با نسبت اضلاع WXYZ به ABCD مقایسه کنید.

۵) در شکل‌های زیر نسبت اضلاع را بنویسید. آیا دو شکل متشابه‌اند؟

۱) $\frac{AB}{WX}=\frac{BC}{XY}=\frac{CD}{ZY}=\frac{AD}{WZ}=۲$

۲) ۲ برابر

۳) $\frac{۱}{۲}$ برابر

۴) معکوس یکدیگرند

۵) $$\frac{HL}{MQ}=\frac{۳}{۶}\neq\frac{HJ}{MN}=\frac{۷}{۱۰}\neq\frac{JK}{NP}=\frac{۳}{۶}\neq\frac{LK}{QP}=\frac{۷}{۱۰}$$

خیر، متشابه نیستند زیرا نسبت اضلاع نظیرشان برابر نیست. کافی است نقاط دلخواه روی یکی از این عکس‌ها انتخاب کنیم و فاصلهٔ بین آنها را بیابیم و با فاصلهٔ نقاط نظیرشان در عکس دیگر مقایسه کنیم تا وجود تفاوت در نسبت‌ها را تشخیص دهیم.

۱ خیر، زیرا ، نسبت طول اضلاع متناظر متفاوت است. کافی است چند نقطهٔ متناظر را انتخاب کنیم و فاصله‌های متناظر را اندازه‌گیری کنیم و نسبت آنها را به دست آوریم.

۲ الف) شکل ۱ ، زیرا ارتفاع شکل عوض نمی‌شود ولی طول آن سه برابر می‌شود.

ب) شکل ۲

پ) شکل ۳

استفاده از لفظ بزرگ نمایی لزوماً به معنی بزرگ شدن نیست بلکه می‌تواند شکل اولیه را کوچک‌تر کند و بستگی به k دارد.

- در شکل پروانه‌ها بهتر است نقاط دلخواهی را روی شکل انتخاب کنید و با یافتن فاصلهٔ بین این نقاط و نقاط متناظرشان و همچنین یافتن زاویه‌های نظیر در شکل‌های (الف) و (ب) و (پ) به سؤال‌ها پاسخ داد.
- همچنین می‌توان با قرار دادن پروانه‌ها در مستطیل‌ها طول و عرض آنها را بررسی نمود.

در ادامه در زمینهٔ تاریخی با بیان یک مسئلهٔ واقعی (محاسبهٔ طول ارتفاع اهرام مصر) قضیهٔ تشابه مثلث‌ها از طریق تساوی زاویه‌ها به‌طور غیرمستقیم ارائه شده است . اثبات درستی این قضیه به‌علت طولانی بودن و دور شدن از هدف این فصل ارائه نشده است.

توجه شود که خورشید در فاصله‌ای بسیار دور قرار دارد و شعاع‌های نوری که به یک جسم تابیده می شود با هم موازی محسوب می‌شوند زیرا خطای عدم توازی این شعاع‌ها با دستگاه‌های اندازه‌گیری ما قابل تشخیص نیست. با استفاده از خطوط موازی و مورب می توان به سؤال گفته شده در قسمت تالس جواب داد .

به‌جای مسئلهٔ تاریخی، می‌توان زمینه‌های دیگری مانند یافتن ارتفاع تیرک پرچم و.... را انتخاب نموده و برای یادگیری بیشتر در کلاس استفاده نمود.

نکته: توجه شود شرط تساوی زاویه‌ها برای برقراری تشابه بین چندضلعی‌های بیشتر از سه ضلع کافی نیست و برای متشابه بودن هر دو چندضلعی باید برابری نسبت اضلاع رأس‌های نظیر هم برقرار باشد.

به‌عنوان مثال در فعالیت ۱ با اینکه دو شکل مستطیل هستند و زاویه‌های برابر دارند ولی متشابه نیستند زیرا نسبت اضلاع نظیرشان مساوی نیست.

کار در کلاس ۴

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در رأس C قائمه است، KH بر BC عمود است.

الف) کدام مثلث‌ها متشابه‌اند؟ چرا؟

ب) نسبت‌های اضلاع متناظر را بنویسید.

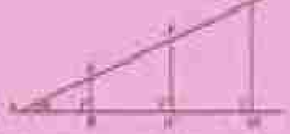
الف) دومثلث ABC و KBH به‌دلیل داشتن زاویه‌های مساوی، متشابه‌اند و ضلع AB نظیر ضلع KB می‌باشد زیرا هردو روبروی زاویهٔ قائمه هستند.

ب) $$\frac{AB}{KB}=\frac{BC}{BH}=\frac{CA}{KH}$$

فعالیت

در شکل روبه‌رو یک زاویهٔ تند به رأس A رسم شده است.

۱) روی یک ضلع این زاویه چند نقطهٔ دلخواه مانند B و C و D در نظر بگیرید. از این نقاط عمودهایی بر این ضلع رسم کنید که ضلع دیگر زاویه را به ترتیب در نقاط E و F و G قطع کنند.



۲) با اندازه‌گیری به کمک خط‌کش، مشخص کنید که تساوی‌های زیر برقرارند.

$$\frac{EB}{AB}=\frac{FC}{AC}=\frac{GD}{AD}$$

۳) تشابه مثلث‌هایی را که در شکل دیده می‌شوند، بررسی کنید و به کمک آن درستی تساوی‌های بالا را نشان دهید.

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، اثبات کردن

۱ لازم است هنرجو در رسم خطوط عمود بر هم توانایی استفاده از خط‌کش و گونیا را داشته باشد.

۲ با اندازه‌گیری پاره‌خط‌های ذکر شده به نسبت‌های تقریباً مساوی در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که در زاویهٔ A مشترکند می‌رسیم. بهتر است هنرجویان با خط‌کش این کار را انجام داده و نتیجه‌گیری کنند. البته تساوی‌های به‌دست آمده تقریبی خواهند بود.

۳ با استفاده از زاویه‌های مثلث در مثلث‌های قائم‌الزاویه، دیده می‌شود که طبق نتایج بخش قبل، تمام مثلث‌های قائم‌الزاویه (در شکل) متشابه‌اند (زیرا همگی دارای یک زاویهٔ راست بوده و در زاویهٔ تند A مشترکند). بنابراین می‌توانیم نسبت اضلاع متناظر را بنویسیم و با طرفین وسطین و نوشتن نسبت جدید، نتیجه بگیریم که:

$$\frac{EB}{AE}=\frac{FC}{AF}=\frac{GD}{AG}$$

این تساوی‌ها مبنای اصلی تعریف نسبت مثلثاتی تانژانت هستند.

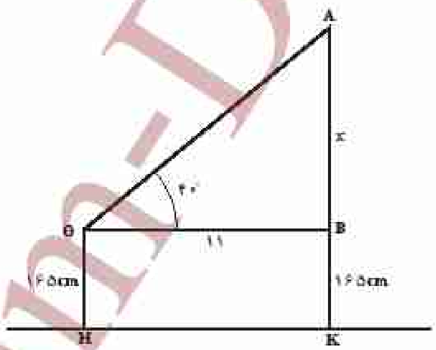

کار در کلاس ۳

۱) مقدار تقریبی تانژانت زاویه‌های زیر را با اندازه‌گیری با خط‌کش محاسبه کنید.

۲) علی با یادگیری مفهوم تانژانت فهمید که می‌تواند طول ارتفاع تیرک پرچم مدرسه‌اش را اندازه‌گیری کند. او زاویهٔ دید خود به نوک تیرک را با سطح افق تقریباً ۴۰ درجه تخمین زد. قد علی ۱۶۵ سانتی‌متر و فاصلهٔ او تا تیرک پرچم ۱۱ متر است. با این اطلاعات او چگونه می‌تواند طول ارتفاع تیرک را به‌طور تقریبی بیابد؟

در حالت‌های مختلف است. برای این کار هنرجو باید برای هر کدام یک مثلث قائم‌الزاویهٔ مناسب بسازد. کافی است از نقطه‌ای روی یکی از اضلاع زاویه‌های داده شده بر ضلع دیگر عمود کند. سپس با اندازه‌گیری اضلاع روبرو به زاویه و مجاور به زاویه و تقسیم آنها بر هم مقدار تقریبی تانژانت زاویه را محاسبه کند.

۲ در این سؤال هنرجو در یک مسئلهٔ محیط پیرامونی خود قرار می‌گیرد. برای حل به شکل زیر توجه کنید.



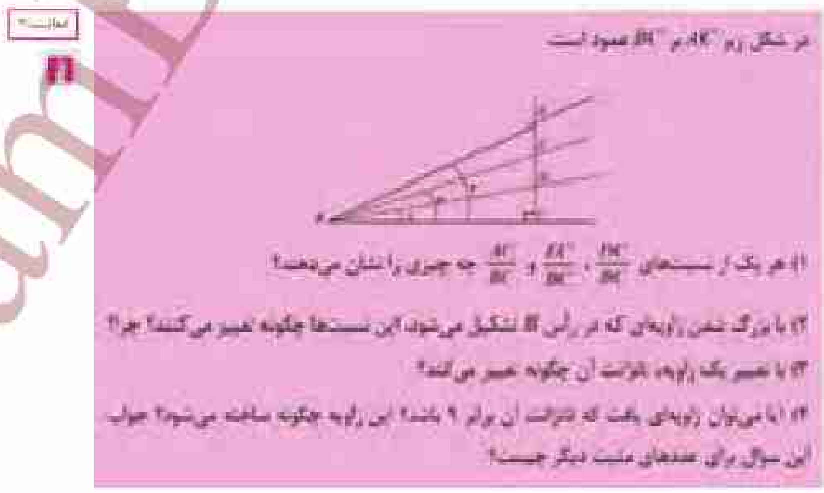
$OB = HK = ۱۱m$

$= \tan ۴۰^\circ = \frac{x}{۱۱}$

$\Rightarrow x = ۱۱\tan ۴۰^\circ \approx ۹/۲۳$

$\Rightarrow$ طول ارتفاع تیرک $= x + BK = ۱۱\tan ۴۰^\circ + ۱/۶۵ \approx ۱۰/۸۸$

در ادامه سؤالی دربارهٔ مقادیر ممکن برای تانژانت یک زاویه مطرح می‌شود که در طی یک فعالیت جواب آن به‌دست می‌آید.


فعالیت ۳

در شکل زیر AK بر BK عمود است.

۱) هر یک از نسبت‌های ... چه چیزی را نشان می‌دهند؟

۲) با بزرگ شدن زاویه‌ای که در رأس B تشکیل می‌شود این نسبت‌ها چگونه تغییر می‌کنند؟ چرا؟

۳) با تغییر یک زاویه، تانژانت آن چگونه تغییر می‌کند؟

۴) آیا می‌توان زاویه‌ای یافت که تانژانت آن برابر ۹ باشد؟ این زاویه چگونه ساخته می‌شود؟ جواب این سؤال برای عددهای مثبت دیگر چیست؟

۱ در شکل صفحهٔ قبل، تمام مثلث‌های قائم‌الزاویه در ضلع CB مشترکند ولی زاویه‌های تند آنها در رأس B تغییر می‌کند. این نسبت‌ها تانژانت زاویه‌های تندی هستند که در رأس B ساخته شده‌اند. زیرا همگی این نسبت‌ها به‌صورت نسبت طول ضلع مقابل به این زاویه‌ها به ضلع مجاور این زاویه‌ها هستند.

نسبت‌های $\frac{CD}{CB}$ و $\frac{CE}{CB}$ و $\frac{CA}{CB}$ به‌ترتیب تانژانت زاویه‌های $B_۱$ و $B_۲$ و $B_۳$ می‌باشند.

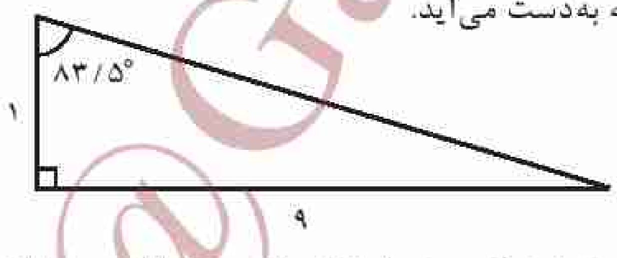
$$\tan B_۳ = \frac{AC}{BC}\ ,\ \tan B_۲ = \frac{EC}{BC}\ ,\ \tan B_۱ = \frac{DC}{BC}$$

۲ چون BC ثابت و $DC<EC<AC$ پس $\frac{DC}{BC} < \frac{EC}{BC} < \frac{AC}{BC}$ یعنی با بزرگ شدن زاویه در رأس B این نسبت‌ها هم بزرگ‌تر می‌شوند.

۳ از آنجا که نسبت‌های بند قبل همان تانژانت آن زاویه‌ها بودند نتیجه می‌شود: هرچه زاویه تند بزرگ‌تر شود تانژانت آن نیز بزرگ‌تر می‌شود و اگر زاویه تند کوچک‌تر شود تانژانت آن کوچک‌تر می‌شود. یعنی

$$\tan B_۳ > \tan B_۲ > \tan B_۱$$

۴ بله، کافی است مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که طول اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آن ۱ و ۹ باشد در این صورت زاویهٔ روبرو به ضلع به طول ۹ جواب مسئله است. زیرا در محاسبهٔ تانژانت این زاویه نسبت $\frac{۹}{۱}$ حساب می‌شود که ۹ نمایش طول ضلع روبرو به زاویه و ۱ نمایش طول ضلع مجاور به آن زاویه است. با اندازه‌گیری این زاویه با نقاله مقدار تقریبی ۸۳/۵ درجه به‌دست می‌آید.



اگر به جای عدد ۹ از هر عدد مثبت دیگری هم استفاده کنیم، می‌توانیم عملیات بالا را تکرار کنیم و هر عدد مثبتی تانژانت زاویه‌ای خواهد بود.

کار در کلاس ۴

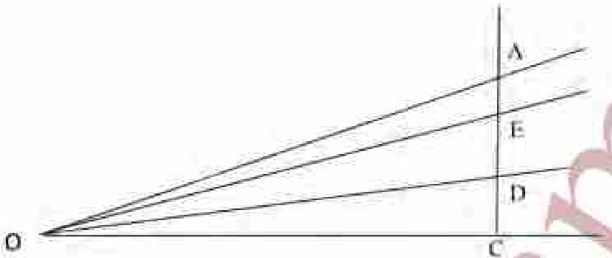
۱) اگر زاویهٔ تندی به صفر نزدیک شود تانژانت آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟ درستی حدس خود را با رسم شکل نشان دهید.

۲) اگر زاویهٔ تندی به ۹۰ درجه نزدیک شود در مورد تغییرات اندازهٔ تانژانت آن چه می‌توان گفت؟ (**راهنمایی:** به کمک ماشین حساب برای مقادیر تانژانت زاویه‌های نزدیک به ۹۰ درجه جدولی بسازید.)

۱ در شکل صفحهٔ بعد دیده می‌شود که با نزدیک شدن اندازهٔ زاویه به صفر تانژانت

آن نیز به صفر نزدیک می‌شود. زیرا در نسبتی که تانژانت را می‌سازد، مخرج ثابت است ولی صورت از هر عدد مثبت دلخواهی کوچک‌تر می‌شود و این به معنای نزدیک شدن تانژانت به صفر است.

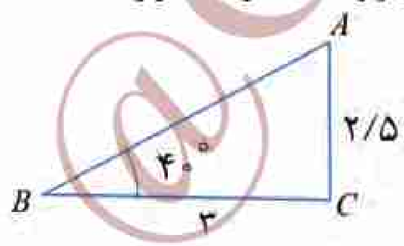
۲ هرچه زاویه بزرگ‌تر شود و به ۹۰ درجه نزدیک شود، تانژانت نیز بزرگ‌تر می‌شود و از هر عدد دلخواهی بزرگ‌تر می‌شود. زیرا مخرج ثابت است ولی صورت از هر عددی بزرگ‌تر می‌شود. در این وضعیت اصطلاحاً می‌گویند مقدار تانژانت به بی‌نهایت می‌رود. با ماشین حساب نیز می‌توان به این مطلب رسید.



tan۸۰°≈ ۵/۶۷	tan۸۵°≈ ۱۱/۴۳	tan۸۹/۵°≈۱۱۴/۵۸
tan۸۱°≈ ۶/۳۱	tan۸۶°≈۱۴/۳	tan۸۹/۷°≈۱۹۰/۹۸
tan۸۲°≈ ۷/۱۱	tan۸۷°≈ ۱۹/۰۸	tan۸۹/۹°≈۵۷۲/۹۵
tan۸۳°≈۸/۱۴	tan۸۸°≈۲۸/۶۳	tan۸۹/۹۵°≈۱۱۴۵/۹۱
tan۸۴°≈۹/۵۱	tan۸۹°≈۵۷/۲۸	

۴) مقدار تقریبی تانژانت زاویه‌های ۴۰ و ۵۰ درجه را پیدا کنید.

کافی است به کمک نقاله زاویه ۴۰ درجه رسم کنید و با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه که یکی از زاویه‌های تند آن ۴۰ درجه است و با اندازه‌گیری مستقیم اضلاع روبرو و مجاور به این زاویه، نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور این زاویه را که جواب مسئله خواهد بود، به‌دست آورید. همین عملیات را برای زاویهٔ ۵۰ درجه تکرار کنید.

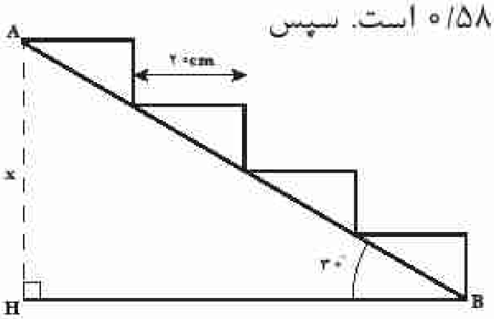


$$\tan ۴۰^\circ \approx \frac{۲/۵}{۳} \approx ۰/۸۳$$

۳) تانژانت چه زاویه‌ای برابر ۸ خواهد شد؟

مشابه بند (۴) فعالیت ۴ یا مثال ارائه شده می‌توان عمل کرد. (این زاویه تقریباً ۸۲/۵ درجه است.)

۴) با توجه به شکل روبه‌رو ارتفاع نقطهٔ A از زمین را بیابید (عرض همهٔ پله‌ها ۲۰cm است.)

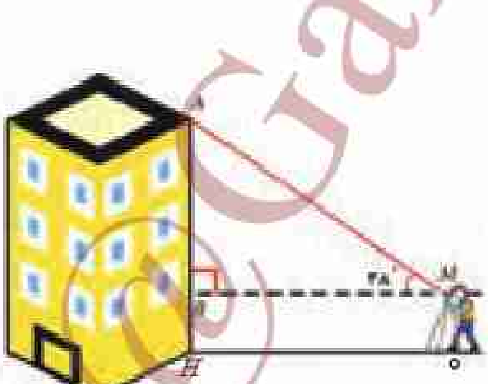


ابتدا تانژانت زاویهٔ ۳۰ درجه را می‌یابیم که تقریباً مساوی ۰/۵۸ است. سپس

BH=۴×۲۰=۸۰cm

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{AH}{BH} \Rightarrow AH = x = ۸۰ \times ۰/۵۸ = ۴۶/۴$$

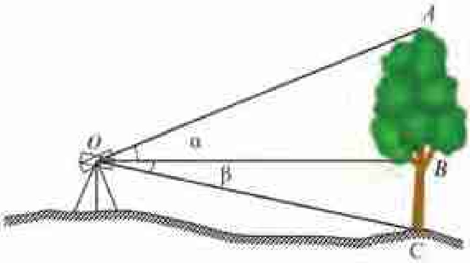
۴) برای محاسبهٔ ارتفاع ساختمانی، دوربین زاویه‌یاب را در یک سطح افقی در نقطهٔ M به فاصلهٔ ۱۵ متری از ساختمان (نقطهٔ O) مستقر کرده‌ایم و به نقطهٔ بالای ساختمان نشانه می‌رویم. زاویهٔ دید برابر ۳۸ درجه به‌دست آمده است. اگر ارتفاع دوربین از زمین یک متر و ۵۴ سانتی‌متر باشد، ارتفاع ساختمان را به‌دست آورید.



$$\left.\begin{aligned} BH = OM = ۱۵۴cm = ۱/۵۴m \\ OH = ۱۵m \\ \tan \alpha = \frac{AB}{BM} \Rightarrow AB = ۱۵ \tan ۳۸^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

ارتفاع ساختمان =AH=AB+BH≈۱۳/۲۵ متر

۵) به کمک دوربین زاویه‌یاب، زاویه‌های α و β به ترتیب ۲۳ درجه و ۱۲ درجه به‌دست آمده‌اند و فاصلهٔ افقی دستگاه تا درخت ۱۸ متر است. با توجه به شکل، ارتفاع درخت را پیدا کنید.

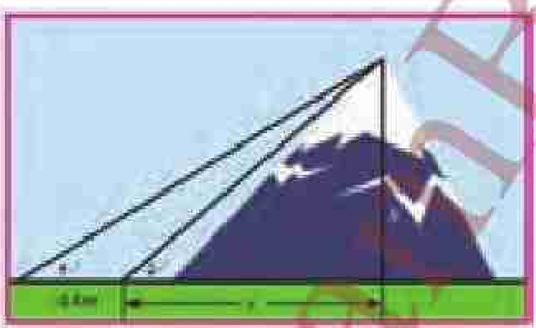


در این دو مثلث $\hat{B}=۹۰^\circ$ و $OB=۱۸m$ و $\beta=۱۲^\circ$ و $\alpha=۲۳^\circ$ بنابراین

$$\left.\begin{array}{l}\tan\alpha=\dfrac{AB}{OB}\rightarrow AB=OB\tan\alpha=۱۸\tan ۲۳^\circ\\ \tan\beta=\dfrac{BC}{OB}\rightarrow BC=OB\tan\beta=۱۸\tan ۱۲^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow$$

ارتفاع درخت $=AB+BC\approx ۷/۶۴+۳/۸۳=۱۱/۴۷$

۶) یک مهندس نقشه‌بردار، برای محاسبهٔ ارتفاع یک کوه در نقطه‌ای می‌ایستد و مشاهده می‌کند که در آن نقطه، نوک کوه با زاویهٔ ۵۰ درجه نسبت به افق دیده می‌شود. پس از آنکه نیم کیلومتر از کوه دور می‌شود، مشاهده می‌کند که نوک کوه با زاویهٔ ۴۰ درجه دیده می‌شود. ارتفاع کوه چقدر است؟



$$\left.\begin{array}{l}\tan ۴۰^\circ=\dfrac{h}{۰/۵+x}\\ \tan ۵۰^\circ=\dfrac{h}{x}\Rightarrow x=\dfrac{h}{\tan ۵۰^\circ}\end{array}\right\}\Rightarrow \tan ۴۰^\circ=\dfrac{h}{۰/۵+\dfrac{h}{\tan ۵۰^\circ}}\Rightarrow h\approx ۱/۴۳$$

فعالیت آموزشی

فرض کنید دکلی به ارتفاع ۴۰ متر با سیمی که با سطح افق زاویهٔ ۳۰ درجه ساخته است مهار می‌شود. کارگری زیر این سیم در نقطه‌ای مانند H چنان می‌ایستد که سیم در نقطه‌ای مانند D با سرش تماس پیدا کند. کارگر دیگری به وسیلهٔ یک متر فلزی، فاصلهٔ A تا D را اندازه‌گیری می‌کند و نسبت $\frac{DE}{AD}$ را حساب می‌کند.

۱) کارگرانی با طول قدهای متفاوت این کار را تکرار می‌کنند و هر کدام، مقداری را برای نسبت طول قد به فاصلهٔ سر تا نقطهٔ A به‌دست می‌آورند. نشان دهید همهٔ آنها یک مقدار را به‌دست می‌آورند.

۲) اگر نسبت $\frac{BH}{AB}$ را حساب کنید مقدار آن با نسبتی که کارگران به‌دست آورده‌اند چه رابطه‌ای دارد؟ چرا؟

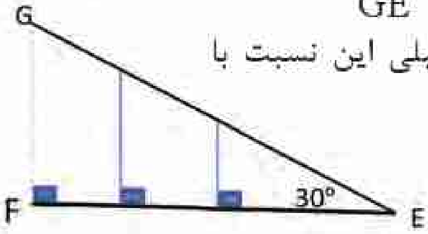
۳) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه مانند شکل زیر که یک زاویهٔ آن ۳۰ درجه است نشان دهید نسبتی که کارگران به‌دست آورده‌اند برابر است با $\frac{FG}{EG}$. این نسبت را با اندازه‌گیری با خط‌کش به‌دست آورید.
(**راهنمایی:** تشابه دو مثلث AHB و EFG را نشان دهید.)

۴) با استفاده از این نسبت طول سیم نگهدارندهٔ دکل را حساب کنید.

۱ به دلیل تشابه دو مثلث قائم‌الزاویه EDA و KFA (به‌دلیل زاویهٔ مشترک $\angle A$ و $\angle E = \angle K = 90^\circ$) خواهیم داشت $\frac{KF}{FA} = \frac{ED}{DA}$

۲ به‌دلیل تشابه دو مثلث ABH و ADE (به‌دلیل زاویهٔ مشترک $\angle A$ و $\angle H = \angle E = \angle K = 90^\circ$) داریم $\frac{BH}{AB} = \frac{FK}{AF} = \frac{DE}{AD}$ یعنی نسبت $\frac{BH}{AB}$ هم با نسبت‌های قبل مساوی است.

۳ طول GF و GE را به‌کمک خط‌کش اندازه گرفته و نسبت $\frac{GF}{GE}$ را محاسبه می‌کنیم $\frac{FG}{EG}=\frac{۱}{۲}$. به‌خاطر تشابه این مثلث و مثلث‌های قبلی این نسبت با نسبت‌های قبلی مساوی است.



۴ به کمک بندهای (۱) و (۲) و (۳) می‌توان مسئله را حل کرد.

$$\frac{BH}{AB}=\frac{\text{طول ارتفاع دکل}}{\text{طول سیم نگهدارنده}} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{۶۰m}{\text{طول سیم نگهدارنده}} \Rightarrow \text{طول سیم نگهدارنده} = ۱۲۰ \text{ متر}$$

در ادامه مفهوم سینوس به‌طور رسمی تعریف می‌شود و مثال‌هایی ارائه می‌شود.

کار در کلاس ۵

۱) به کمک نقاله و با رسم چند مثلث قائم الزاویه، مقدار تقریبی سینوس زاویه‌های ۲۰ و ۳۵ و ۴۰ درجه را بیابید.

مستقیم

مثلاً برای زاویهٔ ۲۰ درجه، ابتدا به کمک نقاله یک زاویهٔ ۲۰ درجه رسم می‌کنیم. سپس با رسم خطی عمود بر یکی از دو ضلع زاویه از نقطه‌ای روی ضلع دیگر زاویه، مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم. طول ضلع مقابل به زاویه ۲۰ درجه و وتر مثلث را اندازه‌گیری می‌کنیم و با محاسبهٔ نسبت آنها، سینوس زاویه را محاسبه می‌کنیم. به همین ترتیب در مورد بقیهٔ زاویه‌ها عمل می‌کنیم.

$\sin ۲۰^\circ \approx ۰/۳۴$ و $\sin ۳۵^\circ \approx ۰/۵۷$ و $\sin ۴۰^\circ \approx ۰/۶۴$

فعالیت

یک ربع دایره به شعاع ۱ واحد، مانند شکل زیر رسم کنید.

۱) نقطهٔ A را روی ربع دایره انتخاب کنید و از آن عمود AB را مطابق شکل رسم کنید. طول پاره‌خط AB چه رابطه‌ای با زاویهٔ β دارد؟ ____________

۲) با کم یا زیاد شدن زاویهٔ β، سینوس آن چگونه تغییر می‌کند؟ ____________

۳) با نزدیک شدن زاویهٔ β به صفر، سینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟ ____________

۴) با نزدیک شدن زاویهٔ β به ۹۰ درجه، سینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟ ____________

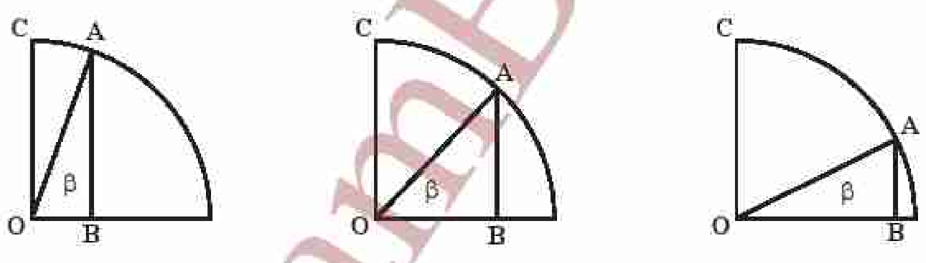
۵) سینوس β چه عددهایی می‌تواند باشد؟ ____________

۱ با توجه به تعریف سینوس یک زاویهٔ تند در مثلث‌های قائم‌الزاویه چون مثلث OAB در رأس B قائمه است پس سینوس زاویهٔ β عبارت است از $\frac{BA}{AO}$ ولی چون وتر این مثلث که همان شعاع ربع دایره (۱ واحد) است، پس $\sin\beta = BA$

اشتباهات ممکن:

در این قسمت انتخاب ضلع مقابل به زاویه همان سینوس زاویه می‌باشد. بهتر است مثال‌هایی زده شود تا معلوم شود این اتفاق همیشه نمی‌افتد و فقط در این مثال که طول وتر ۱ است این وضعیت رخ داده است.

۲ با توجه به شکل دیده می‌شود که با زیاد شدن زاویهٔ β طول پاره خط BA بزرگ می‌شود. بنابراین سینوس آن نیز بزرگ‌تر می‌شود و با کم شدن زاویه، سینوس آن کمتر می‌شود. در شکل‌های زیر از چپ به‌راست به‌صورت شهودی مشاهده می‌کنید که با کوچک شدن زاویه، طول BA یعنی مقدار سینوس زاویهٔ β نیز کم می‌شود.



۳ با نزدیک شدن زاویهٔ β به صفر طول AB یعنی سینوس زاویهٔ β از هر عدد مثبتی کوچک‌تر می‌شود و به صفر نزدیک می‌شود.

۴ با نزدیک شدن زاویهٔ β به ۹۰° دیده می‌شود BA به CO نزدیک می‌شود. بنابراین $\sin\beta$ به عدد ۱ نزدیک می‌شود.

۵ چون در مثلث قائم‌الزاویه هر ضلع زاویهٔ قائمه از وتر کوچک‌تر است پس $BA<AO=۱$ بنابراین $\sin\beta<۱$ و چون $\sin\beta$ طول پاره خط BA است پس $\sin\beta>۰$ یعنی $۰<\sin\beta<۱$ یعنی سینوس زاویهٔ تند β عددی بین ۰ و ۱ است.

ممکن است در نمادگذاری نسبت‌های مثلثاتی هنرجویان عبارت $\sin\alpha$ را همانند ضرب عبارت sin در α فرض کنند و نتیجه بگیرند $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha$ در مثال‌های عددی می‌توان نادرستی این تصور را نشان داد. در این بخش سؤال‌هایی پرسیده شده است تا بدفهمی هنرجویان را در این مورد کاهش دهد. هدف از این سؤال‌ها آن است که هنرجو بداند در رابطه‌هایی مانند $\frac{\sin ۲\alpha}{۲\sin\alpha}$، ضریب α در صورت با عدد (۲ در مخرج) ضریب عددی قابل ساده شدن نیست. برای بررسی این وضعیت‌ها می‌توان سؤال‌هایی مانند سؤال زیر به هنرجویان داد.

۱ درستی یا نادرستی رابطه‌های زیر را با محاسبه عددی تعیین کنید

$$\frac{\sin ۶۰^\circ}{۲\sin ۳۰^\circ} = \sin ۳۰^\circ$$

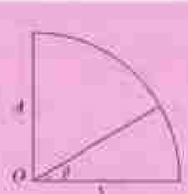
$$۲\sin ۲۰^\circ = \sin ۴۰^\circ$$

در مسئلهٔ زیر هدف تأکید بر مقادیر ممکن برای سینوس یک زاویهٔ تند که باید بین ۰ و ۱ باشد است.

۲ آیا زاویهٔ تندی وجود دارد که سینوس آن $\frac{۴}{۳}$ باشد؟ چرا؟

پاسخ این مسئله خیر است زیرا $\frac{۴}{۳} > ۱$ و همیشه سینوس یک زاویه تند بین ۰ و ۱ است. هنرجویان ممکن است از دلایل دیگری مانند اینکه سینوس یک زاویه برابر است با اندازه ضلع مقابل به آن زاویه به اندازه وتر و اشاره به این نکته که در مثلث قائم‌الزاویه اضلاع زاویه قائم همواره از وتر کوچک‌تر هستند پس سینوس همواره کسری کوچک‌تر از واحد است نیز استفاده نمایند.

ربع دایره‌ای به شعاع واحد مانند روبه‌رو رسم کنید.

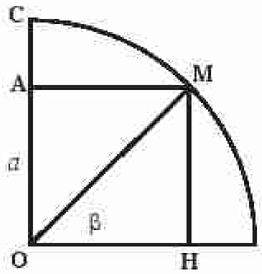


۱) اگر طول پاره‌خط OA برابر a باشد سینوس زاویهٔ β چقدر است؟

۲) روشی بیان کنید که با داشتن یک عدد a به صورت $۰ < a < ۱$ بتوانید زاویه‌ای پیدا کنید که سینوس آن برابر a باشد.

۱ طبق فعالیت قبل $MH = \sin\beta$ پس $a = \sin\beta$

۲ ربع دایره‌ای به شعاع واحد مانند زیر رسم کنید روی شعاع قائم آن به اندازهٔ a جدا کنید، $a = AO$ از A عمودی بر AO رسم کنید تا ربع دایره را در M قطع کند. زاویه‌ای که پاره‌خط OM با شعاع افقی نیم‌دایره می‌سازد، جواب است.



$OA = MH = \sin\beta$

حال به کمک نقاله می‌توان اندازهٔ زاویهٔ β را اندازه گرفت.

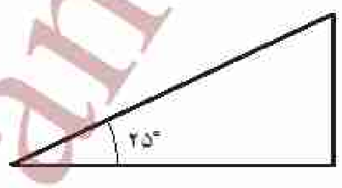
نتیجه از دو بند (۱) و (۲) : سینوس هر زاویه عددی بین ۰ و ۱ است و هر عدد بین ۰ و ۱ می‌تواند سینوس یک زاویهٔ تند باشد.

مسئله‌ها

۱- الف) سینوس زاویهٔ ۲۵ درجه را با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه مناسب به طور تقریبی محاسبه کنید.

ابتدا مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که یک زاویهٔ تند آن ۲۵ درجه باشد سپس وتر و طول ضلع روبرو به این زاویه را با خط کش اندازه‌گیری می‌کنیم و نسبت ضلع روبرو به این زاویه به وتر، سینوس ۲۵ درجه می‌باشد. پس:

$\sin ۲۵^\circ \approx ۰/۴۲$

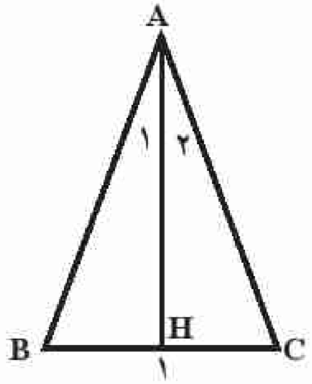


ب) یک مثلث متساوی‌الساقین رسم کنید که زاویهٔ رأس آن ۵۰ درجه باشد. اگر قاعدهٔ این مثلث ۱۰ سانتی‌متر باشد، طول ساق آن را تعیین کنید.

ها و فرایندها:

ارتفاع این مثلث را از رأس آن رسم می‌کنیم. چون در مثلث متساوی‌الساقین

میانه و عمود منصف و ارتفاع و نیمساز رسم شده از رأس بر هم منطبق‌اند داریم:
$\angle A_1 = \angle A_2 = ۲۵^\circ$ و ۵= HB=CH در مثلث قائم‌الزاویهٔ BHA یا CHA،
$\angle HAB = ۲۵^\circ$ و

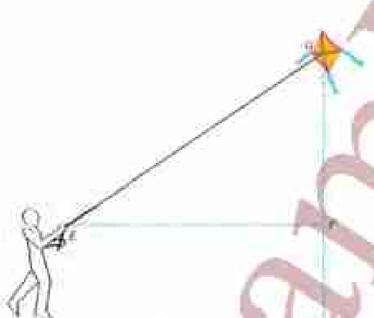


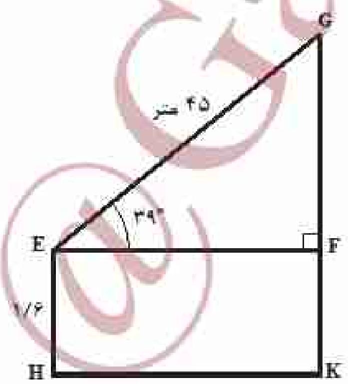
$$\sin ۲۵^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{۵}{AB} \Rightarrow AB = \frac{۵}{\sin ۲۵^\circ} \approx ۱۱/۸۳$$

۲) سینوس چه زاویه‌ای برابر ۰/۸ است؟

می‌توانیم مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنیم که طول وتر آن ۱۰ واحد و یکی از ضلع‌های دیگرش ۸ واحد باشد. زاویه روبه‌رو به ضلع به طول ۸ جواب است. این زاویه را با نقاله اندازه می‌گیریم که تقریباً ۵۳ درجه است.

۴) رضا بادبادکی را به هوا فرستاده است. فرض کنید ۴۵ متر نخ بادبادک او رها شده است. طبق شکل، زاویهٔ نخ با سطح افق ۳۹ درجه و فاصلهٔ دست رضا از سطح زمین، یک متر و شصت سانتی‌متر است. ارتفاع بادبادک از سطح زمین چقدر است؟



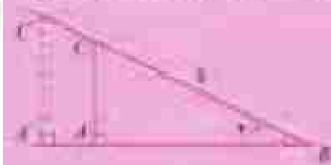


$$\sin ۳۹^\circ = \frac{GF}{۴۵} \Rightarrow GF \approx ۲۸/۳۲$$

ارتفاع بادبادک $\Leftarrow$ =GF+FK≈۲۸/۳۲+۱/۶=۲۹/۹۲

فعالیت ۲

۱) یک زاویه ۴۰ درجه رسم کنید و مطابق شکل مثلث قائم‌الزاویه‌ای بسازید که وتر آن ۵ سانتی‌متر باشد.

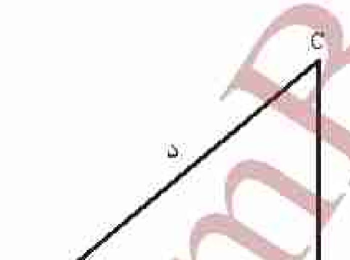


۲) با اندازه‌گیری اضلاع به کمک خط‌کش نسبت $\frac{AB}{BC}$ را بیابید.

۳) مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگری مانند $A'BC'$ با همین زاویه و طول وتر متفاوت رسم کنید و نسبت $\frac{A'B}{BC'}$ را محاسبه کنید. آیا مقدار این نسبت با نسبت بند (۲) متفاوت است؟ چرا؟ (در حالت کلی استدلال کنید).

۴) به کمک نسبتی که در بالا به‌دست آوردید، طول نردبان آتش‌نشانی را حساب کنید.

۱ در این بند هنرجو باید توانایی رسم داشته باشد و به‌کمک خط‌کش و پرگار و نقاله مثلث خواسته شده را رسم کنید.

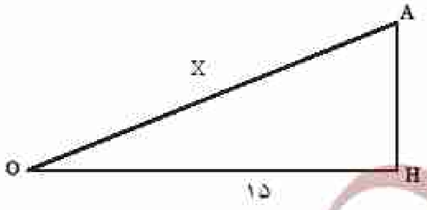


۲ به کمک خط‌کش AB و BC را اندازه‌گیری می‌کنیم. $AB \approx ۳/۸$ و $BC = ۵$

در نتیجه $\frac{AB}{BC} \approx ۰/۷۶$

۳ $\frac{A'B}{BC'} \approx ۰/۷۶$ خیر، زیرا دو مثلث رسم شده، دو مثلث قائم‌الزاویه با زاویه تند مساوی ۴۰ درجه می‌باشند و چون هر کدام یک زاویهٔ ۹۰ درجه نیز دارند با هم متشابه‌اند و اگر نسبت اضلاع متناظر را در این مثلث‌های متشابه بنویسیم با هم مساوی‌اند.

۴ مثلثی که در مسئله آتش نشانی رسم کردیم با مثلثی که در بند (۲) رسم کردیم متشابه‌اند (به خاطر بند ۳) . با نوشتن نسبت اضلاع متناظر داریم:



$$\frac{\text{۱۵ متر}}{\text{طول نردبان}} = \frac{OH}{OA} = \frac{AB}{BC} \approx ۰/۷۶ \Rightarrow \text{طول نردبان} \approx \frac{۱۵}{۰/۷۶} = ۱۹/۷ \text{ متر}$$

در ادامه این بخش، مفهوم کسینوس به‌طور رسمی تعریف می‌شود و مثال‌هایی ارائه می‌شود.

مقدار دقیق کسینوس


کار در کلاس

۱) یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین رسم کنید.

الف) نشان دهید زاویه‌های تند این مثلث ۴۵ درجه‌اند.

ب) اگر طول ساق‌ها را به اندازهٔ یک واحد در نظر بگیریم، طول وتر این مثلث چقدر است؟

پ) با استفاده از محاسبات بالا، سینوس و کسینوس و تانژانت زاویهٔ ۴۵ درجه را به‌دست آورید.

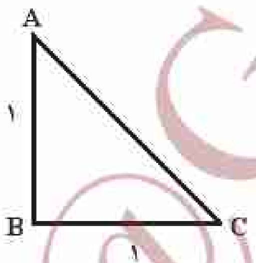
۲) مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۱ واحد را در نظر بگیرید و یکی از ارتفاع‌های آن را رسم کنید.

الف) طول ضلع‌ها و زاویه‌های مثلث قائم‌الزاویهٔ رسم شده را حساب کنید.

ب) با استفاده از محاسبات انجام شده، سینوس، کسینوس و تانژانت زاویه‌های ۳۰ و ۶۰ درجه را به‌دست آورید.

۳) به کمک دو سؤال بالا، جدول روبه‌رو را کامل کنید.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
سینوس			
کسینوس			
تانژانت			



۱) **الف:** چون دو ضلع این مثلث با هم مساوی‌اند $\angle A = \angle C$ و چون مجموع آنها ۹۰ درجه است، هردو زاویه ۴۵ درجه هستند.

$$\left.\begin{array}{l} \angle A = \angle C \\ \angle A + \angle B + \angle C = ۱۸۰^\circ , \angle B = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \angle A = \angle C = ۴۵^\circ$$

۱) ب:

اگر یکی از ضلع‌های آن ۱ باشد ضلع دیگرش هم ۱ است و با استفاده از قضیه فیثاغورس می‌توان طول وتر این مثلث را یافت.

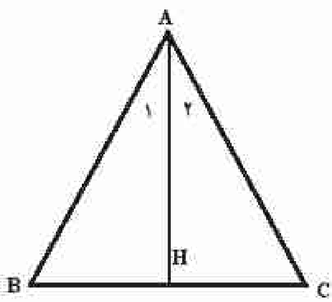
$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ = ۱^۲ + ۱^۲ = ۲ \Rightarrow AC = \sqrt{۲}$$

۱) پ:

$$\sin \angle A = \sin ۴۵^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \text{ و } \cos \angle A = \cos ۴۵^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۴۵^\circ = \tan \angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{۱}{۱} = ۱$$

۲:



(الف) می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع همهٔ ضلع‌ها و زاویه‌ها مساوی‌اند. در نتیجه: $\angle A = \angle B = \angle C = ۶۰^\circ$ از طرفی ارتفاع و نیمساز و میانه و عمودمنصف رسم شده از همهٔ رأس‌ها یکسان هستند، پس

$$HB = CH = \frac{CB}{۲} = \frac{۱}{۲} \quad \text{و} \quad \angle HAB = \angle HAC = ۳۰^\circ = \frac{\angle A}{۲}$$

در مثلث قائم الزاویهٔ ABH به کمک رابطهٔ فیثاغورس داریم

$$AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ \Rightarrow ۱^۲ = AH^۲ + (\frac{۱}{۲})^۲ \Rightarrow AH = \sqrt{\frac{۳}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

(ب)

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \text{ و } \sin ۳۰^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{۱}{۲}}{۱} = \frac{۱}{۲}$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{BH}{AH} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cos ۶۰^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{۱}{۲}}{۱} = \frac{۱}{۲} \text{ و } \sin ۶۰^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

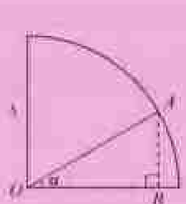
$$\tan ۶۰^\circ = \frac{AH}{BH} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳}$$

این محاسبه‌ها را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم.

نسبت‌های مثلثاتی	۳۰ درجه	۴۵ درجه	۶۰ درجه
سینوس	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
کسینوس	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
تانژانت	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$

فعالیت آموزشی

یک ربع دایره به شعاع واحد، مانند شکل زیر، رسم کنید.



نقطهٔ A را روی ربع دایره انتخاب کنید. طول پاره‌خط OH چه رابطه‌ای با زاویهٔ α دارد؟

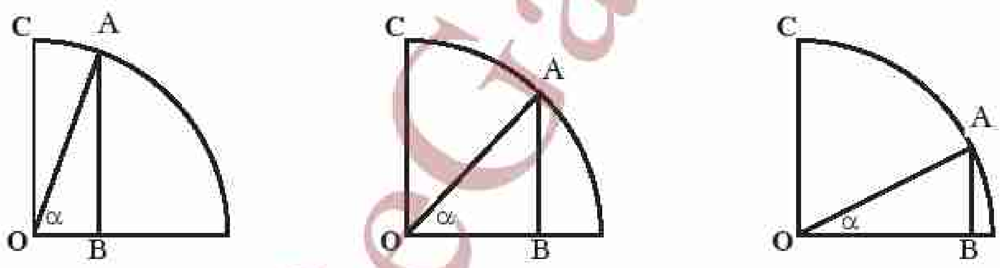
۲) با کم یا زیاد شدن زاویهٔ α، کسینوس آن چه تغییری می‌کند؟

۳) کسینوس زاویهٔ α چه اعدادی می‌تواند باشد؟

۴) با نزدیک شدن زاویهٔ α به صفر، کسینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟

۵) با نزدیک شدن زاویهٔ α به ۹۰ درجه، کسینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟

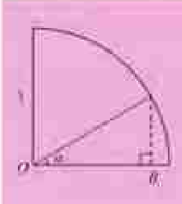
۱ با توجه به تعریف کسینوس یک زاویهٔ تند در مثلث‌های قائم الزاویه، چون مثلث در رأس B قائمه است، کسینوس زاویه α عبارت است از $\frac{BO}{AO}$ ولی چون وتر این مثلث که همان شعاع ربع دایره (۱ واحد) است، $OB= \cos\alpha$.
در کلاس توضیح دهید که **فقط در این شکل که طول وتر ۱ واحد است**، ضلع مجاور، کسینوس زاویه را نشان می‌دهد.
۲ با توجه به شکل دیده می‌شود که با زیاد شدن زاویهٔ α طول پاره‌خط BO کوچک می‌شود. بنابراین کسینوس α کوچک‌تر می‌شود و با کم شدن α کسینوس α بزرگ‌تر می‌شود. در شکل‌های زیر این مطلب را به‌صورت شهودی مشاهده می‌کنید.



۳ چون در مثلث قائم‌الزاویه، هر ضلع زاویهٔ قائمه از وتر کوچک‌تر است داریم: $BO<AO=1$. بنابراین $\cos\alpha<1$ و چون $\cos\alpha$ طول پاره‌خط BO است داریم: $\cos\alpha>0$. پس: $0<\cos\alpha<1$ یعنی کسینوس زاویهٔ تند α عددی بین ۰ و ۱ است.
۴ با نزدیک شدن زاویهٔ α به صفر طول OB بزرگ می‌شود و به شعاع افقی نزدیک می‌شود یعنی $\cos\alpha$ به عدد یک نزدیک می‌شود.
۵ با نزدیک شدن زاویهٔ α به 90° دیده می‌شود BO کوچک می‌شود. یعنی کسینوس زاویهٔ α از هر عدد مثبتی کوچک‌تر شده و به صفر نزدیک می‌شود.
مناسب است که تذکر داده شودکه فقط در این شکل که طول وتر ۱ است، ضلع مجاور، کسینوس زاویه را نشان می‌دهد. بهتر است مثالی زده شود که وتر در آن ۱ نباشد. (به مثال ابتدای بخش کسینوس در کتاب کار توجه شود)

فعالیت ۹

ربع دایره‌ای به شعاع واحد، مانند شکل روبه‌رو رسم کنید.

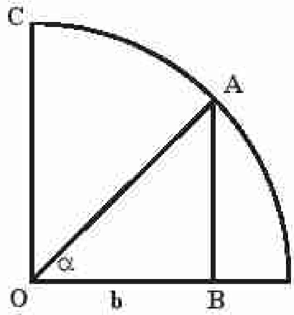


۱) اگر طول پاره‌خط BO برابر b باشد، کسینوس زاویهٔ α چقدر است؟

۲) روشی بیان کنید که با داشتن یک عدد b به صورت $0 < b < 1$ بتوان زاویه‌ای پیدا کرد که کسینوس آن برابر b باشد.

۱ با توجه به واحد بودن طول وتر در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB داریم: $\cos\alpha = OB = b$.

۲ ربع دایره‌ای به شعاع واحد رسم کنید. سپس روی شعاع افقی آن به اندازهٔ b جدا کنید که $b=BO$. از B عمودی بر BO رسم کنید تا ربع دایره را در A قطع کند. زاویهٔ AOB جواب مسئله است زیرا $\cos\alpha = OB = b$



سپس به کمک نقاله می‌توان اندازهٔ آن زاویه را محاسبه نمود.

این فعالیت نشان می‌دهد که هر عدد بین ۰ و ۱ می‌تواند برابر کسینوس زاویه‌ای باشد.

دقت شود در این بخش به بدفهمی و نامثال‌های کسینوس نیز پرداخته شود تا احتمال اشتباه هنرجو به حداقل برسد. مثلاً کدام یک از رابطه‌های زیر درست یا نادرست‌اند (به کمک محاسبه)

۱) $\dfrac{\cos 60^\circ}{2\cos 30^\circ} = \cos 30^\circ$

۲) $\cos 80^\circ = 2\cos 40^\circ$

۳ آیا زاویهٔ تندی وجود دارد که کسینوس آن $\frac{4}{3}$ باشد؟ چرا؟

پاسخ این مسئله خیر است زیرا $\frac{4}{3} > 1$ درحالی که همیشه کسینوس یک زاویه تند بین ۰ و ۱ است.

مسئله‌ها

۱) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویهٔ مناسب، کسینوس زاویه‌های ۱۵ و ۷۵ درجه را حساب کنید.

به کمک خط‌کش و نقاله قبلاً توضیح کامل داده شده است.

$\cos 15^\circ \approx 0/96 , \cos 75^\circ = 0/26$

۲) زمین بزرگی به شکل مثلث متساوی‌الساقین به قاعدهٔ ۱۰۰ متر و با زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ ۵۰ درجه است.

الف) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویهٔ مناسب، از طریق اندازه‌گیری با خط‌کش، کسینوس زاویهٔ ۵۰ درجه را به طور تقریبی محاسبه کنید.

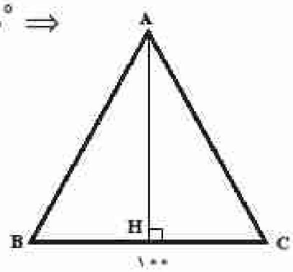
ب) طول اضلاع زمین مثلث شکل را بیابید.

پ) مساحت زمین را بیابید.

الف) همانند سؤال ۱ عمل می‌کنیم که نتیجه می‌شود $\cos 50^\circ \approx 0/64$

ب) شکل زمین را مانند زیر رسم می‌کنیم. از A ارتفاع وارد بر ضلع BC را رسم می‌کنیم در مثلث قائم‌الزاویهٔ HBA:

$$BH = \frac{BC}{2} = 50m \Rightarrow \cos \angle B = \frac{BH}{AB} \text{ و } \angle B = 50^\circ \Rightarrow$$



$$\Rightarrow AC = AB = \frac{50}{\cos 50^\circ} \approx \frac{50}{0/64} = 78/125$$

پ) از رابطهٔ فیثاغورس داریم :

$$AB^{۲} = AH^{۲} + BH^{۲} \Rightarrow AH = \sqrt{AB^{۲} - BH^{۲}} = \sqrt{(۷۸/۱۲۵)^{۲} - ۵۰^{۲}} \approx ۶۰$$

$$S = \frac{AH \times BC}{۲} \approx \frac{۶۰ \times ۱۰۰}{۲} = ۳۰۰۰$$

۳) حسن و علی در یک روز تعطیل می‌خواهند از دو نقطهٔ متفاوت و هم‌سطح در دو مسیر مختلف از پای کوه تا قلهٔ آن بروند. علی با زاویهٔ ۳۲ درجه و حسن با زاویهٔ ۴۰ درجه از کوه بالا می‌روند. علی پس از طی ۱۲۰۰ متر و حسن پس از طی ۸۰۰ متر به قلهٔ کوه می‌رسند. فاصلهٔ علی و حسن را در پای کوه محاسبه کنید.

ابتدا به کمک مثلث قائم‌الزاویه مناسب مقدار کسینوس زوایه‌های ۳۲ و ۴۰ درجه را می‌یابیم. سپس با استفاده از تعریف کسینوس مقدار x و y را یافته و با هم جمع می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \cos ۳۲^{\circ} = \dfrac{y}{۱۲۰۰} \\ \cos ۳۲^{\circ} \approx ۰/۸۵ \end{array}\right\} \Rightarrow y = ۱۲۰۰ \cos ۳۲^{\circ} = ۱۲۰۰ \times ۰/۸۵ = ۱۰۲۰m$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos ۴۰^{\circ} = \dfrac{x}{۸۰۰} \\ \cos ۴۰^{\circ} = ۰/۷۷ \end{array}\right\} \Rightarrow x = ۸۰۰ \cos ۴۰^{\circ} = ۸۰۰ \times ۰/۷۷ = ۶۱۶m$$

$$x + y = ۱۶۳۶m$$

۴) درستی یا نادرستی روابط زیر را بررسی کنید.

الف) $\cos ۲۰^{\circ} < \cos ۴۰^{\circ}$

ب) $\tan ۲۰^{\circ} < \tan ۳۰^{\circ}$

پ) $\sin ۴۰^{\circ} < \sin ۲۰^{\circ}$

الف) نادرست است زیرا هر چه زاویه تند بزرگ شود، کسینوس آن کوچک می‌شود.
ب) درست است زیرا هر چه زاویه تند بزرگ شود تانژانت آن زاویه نیز بزرگ می‌شود.
پ) نادرست است زیرا هرچه زاویه تند بزرگ شود سینوس آن زاویه نیز بزرگ می‌شود.

۵) مقدار عددی عبارت‌های زیر را پیدا کنید.

$$A=\frac{\sin ۶۰^\circ+\tan ۴۵^\circ-\cos ۳۰^\circ}{۱+\sin ۳۰^\circ} \quad و \quad B=\frac{\tan ۶۰^\circ+۲\cos ۳۰^\circ-۲\sqrt{۳}}{۱+\sin ۶۰^\circ}$$

$$B=\frac{\sqrt{۳}+۲\frac{\sqrt{۳}}{۲}-۲\sqrt{۳}}{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=۰ \quad و \quad A=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱+\frac{۱}{۲}}=\frac{۲}{۳}$$

۶) دو کابل فلزی یک برج مخابراتی را نگه داشته‌اند. زاویهٔ بین زمین و کابل‌ها به ترتیب ۳۵ و ۷۲ درجه و فاصلهٔ بین محل اتصال دو کابل در زمین، ۳۳ متر است. طول هر یک از این کابل‌ها چقدر است؟

$$\cos ۳۵^\circ=\frac{m}{x}\Rightarrow m=x\cos ۳۵^\circ \text{ ، } \cos ۷۲^\circ=\frac{n}{y}\Rightarrow n=y\cos ۷۲^\circ$$

$$\begin{cases} x\cos ۳۵^\circ+y\cos ۷۲^\circ=m+n=۳۳ \\ x\sin ۳۵^\circ=h=y\sin ۷۲^\circ\Rightarrow x=\dfrac{y\sin ۷۲^\circ}{\sin ۳۵^\circ} \end{cases} \Rightarrow y\approx ۱۹/۷ \;,\quad x\approx ۳۲/۷$$

۷) با انجام محاسبات عددی، درستی روابط زیر را بررسی کنید.

الف) $\cos ۶۰^\circ=۲\cos ۳۰^\circ$ ب) $\sin ۶۰^\circ<۲\sin ۳۰^\circ$

پ) $\cos ۶۰^\circ<۲\sin ۳۰^\circ\cos ۳۰^\circ$ ت) $\tan ۶۰^\circ+\tan ۳۰^\circ=\dfrac{۲}{\sin ۶۰^\circ}$

با جایگذاری مقادیر نسبت‌های مثلثاتی می‌توان درستی یا نادرستی آنها را تعیین کرد.

الف) نادرست زیرا $\frac{۱}{۲}\neq ۲\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

ب) درست

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲} < ۲(\frac{۱}{۲}) = ۱$$

پ) درست زیرا

$$\frac{۱}{۲} < ۲(\frac{۱}{۲})(\frac{\sqrt{۳}}{۲})$$

ت) درست زیرا

$$\sqrt{۳} + \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

۸) سمت راست تساوی‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $A = \sin ۳۰^\circ + \cos ۳۰^\circ$

ب) $B = \frac{۲\cos ۳۰^\circ - ۲\sin ۳۰^\circ}{۲\tan ۴۵^\circ + ۳\cos ۶۰^\circ}$

پ) $C = ۱ - ۲\sin ۳۰^\circ$

$$A = \frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱ + \sqrt{۳}}{۲}$$

$$B = \frac{۲\frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۲(\frac{۱}{۲})}{۲(۱) + ۳(\frac{۱}{۲})} = \frac{۲(\sqrt{۳} - ۱)}{۷}$$

$$C = ۱ - ۲(\frac{۱}{۲}) = ۰$$